ワインバーグの宇宙論

Cosmology

ビッグバン宇宙の進化

S.ワインバーグ Steven Weinberg
小松英一郎 Eiichiro Komatsu 訳

上

日本評論社

ワインバーグの宇宙論

Cosmology

ビッグバン宇宙の進化

S.ワインバーグ Steven Weinberg
小松英一郎 Eiichiro Komatsu 訳

上

日本評論社

"Cosmology" was originally published
in England in 2008.
This translation is published
by arrangement with
Oxford University Press.

はじめに

過去四半世紀に渡り，宇宙論研究は活気にあふれていた．80 年代初頭，インフレーション理論の登場によって宇宙論のいくつかの未解決問題に解法が見いだされ，宇宙の大規模構造の起源を説明するしくみを与えた．とりわけ大規模構造の起源に関する予言は，宇宙マイクロ波背景放射の異方性を観測することで確認できるものであった．

1989 年 11 月，宇宙背景放射探査機（COBE, COsmic Background Explorer）が打ち上げられた．まもなく，衛星に搭載された分光器による測定で宇宙マイクロ波背景放射の熱的性質が明らかとなり，その温度が小数点以下 3 桁の精度で決定された．これは，宇宙論において先例を見ない高精度なものである．それから少し後，長い間探し求められてきたマイクロ波背景放射の異方性が，同衛星に搭載された放射計のデータから発見された．

この発見に続き，地上に設置された検出器や気球に載せた検出器による観測，そして決定的にはウィルキンソンマイクロ波異方性探査機（WMAP, Wilkinson Microwave Anisotropy Probe）により，これらの異方性が，インフレーション理論をもとにした予想とよく一致することが示された．

90 年代後半には，Ia 型超新星[訳注 1]を標準光源に用いて，宇宙が加速的に膨張していることが発見された．これは，宇宙のエネルギーの大部分がある種の，圧力とエネルギー密度の比が $-1/3$ より小さい暗黒エネルギーで占められていることを示唆している[訳注 2]．この発見はマイクロ波背景放射の異方性の精密観測，および大規模な銀河のサーベイ（掃天）観測によって確認された．これらの観測データを総合することにより，宇宙論パラメータの値は確かなものになっていった．

一方，天文学における従来の手法も徐々に，しかし独立的に，宇宙論パラメータの決定精度を向上させていった．恒星大気の分光観測によるトリウム，続いてウランの発見，それに加えて球状星団の主系列からの折れ曲がり（65 ページ参照）の継続的な研究は，宇宙年齢の推定値を絞り込んできた．銀河間ガスによる

訳注 1 I 型超新星は，そのスペクトルに水素の吸収線が見られないものの呼称だが，Ia 型超新星はその中でもケイ素の吸収線が見られるものを指す．

訳注 2 暗黒エネルギーを完全流体とみなしたとき，その圧力はエネルギー密度の $-1/3$ 倍よりも小さい．

吸収線の観測から得られた重水素と水素の存在比率は，宇宙論的元素合成の計算と突き合わせることで，宇宙に存在する通常のバリオン物質の質量密度を与えた．その密度の値はある種ミステリアスなもので，バリオン物質でない冷たい暗黒物質の密度のたかだか 5 分の 1 程度であった．ハッブル宇宙望遠鏡，および地上望遠鏡の観測からは，より正確なハッブル定数の値が得られてきた．これらの手法で得られたパラメータの値のいくつかが，宇宙マイクロ波背景放射や大規模構造の研究で得られた値と整合することは，大いに心強い．

さらに進歩は続く．近い将来において，我々は暗黒エネルギーの密度が時間に関して一定であるか，あるいは変化するかの絶対的な情報を得るだろうし，インフレーションの時期の直接観測への道を拓く重力波の兆候が見つかるだろうと期待している．暗黒物質の正体は，大型加速器において人工的に暗黒物質を生成するか，あるいは自然に存在して地球に降り注いでいる暗黒物質を直接観測することで明らかになるだろう．一方で，どれほどの時間をかければ，基礎となる物理理論から出発して具体的なインフレーション理論を導いたり，暗黒物質や暗黒エネルギーを説明できるようになるかについては，まだはっきりとしない．

この宇宙論における新展開は，まるで素粒子物理学のそれを見るようである．素粒子と場の理論の標準模型は 80 年代までには完成されていた．その後も重要な理論的，および実験的な仕事は続いたものの，現在では，実験と新しい理論的アイデアとのあいだにはほとんど関連性が見られない．このため，素粒子物理学はその生気のほとんどを失ってしまった．一方，宇宙論は，素粒子物理学の研究者が 60 年代や 70 年代に経験したような興奮を提供しているのだ．

1999 年，全三巻にわたる場の量子論の本（以下 “QTF” と呼ぶ）を書き終えた私は，（慣れないほど）たくさんの時間ができたこともあり，過去 20 年間における宇宙論の素晴らしい進展の礎となった理論をくわしく学ぼう，と思いたった．昔いくつか宇宙論の研究をしたとはいえ，現在の宇宙論に追いつくのは大変時間を要する仕事となった．宇宙論に関するレビュー論文は，観測データの良いまとめにはなったが，往々にして導出抜きで式を引用し，もととなる式への参照すら与えないことがあった．ときとして式は誤っており，そのため自分で導き出すのは困難を極めた．もととなる導出を見つけることができても，論文は論理に穴があったり，隠れた仮定に基づいていたり，説明のない記号を使ったりしていた．しばしば，大規模なコンピュータプログラムによる計算が解析的な研究に取って

代わっていた．私は，関連する理論を自分の手で組み立てるのがもっとも手っ取り早いことであるのに気づいたのだった．

本書がその集大成である．本書の目的は，現代の宇宙論研究において実際に使われ，テストされている考えや式を包括的に説明することである．本書は大きくわけて 2 つのパートに分かれている．私の授業での経験からいえば，両パートとも大学院の一学期分の授業に十分足る内容である．最初のパート（1 章から 4 章）は，主に等方で一様な，平均化された宇宙を扱うが，マイクロ波背景放射の異方性の短い紹介も 2.6 節に与えておく．これらの章の順序は，宇宙の歴史の流れにほぼ逆行する形となっている．1 章は銀河が形成された時期以降の宇宙に特化しており，赤方偏移でいえばほぼ $z < 10$（約 4.6 億年以降）に相当する．2 章では $z \simeq 1000$（約 42 万年頃）に発せられたマイクロ波背景放射を扱う．3 章では初期宇宙を扱う．時期としては宇宙膨張が放射の寄与に支配され始めた時期から赤方偏移にして $z \approx 10^4$（約 6800 年頃），すなわち放射の密度が物質の密度を下回る時期までである．4 章ではインフレーションの時期を取り上げる．インフレーションは放射優勢の時期より以前に起こったと考えられている．

二つ目のパート（5 章から 10 章）では，平均化された一様等方宇宙からのずれに集中する．5 章でいくつかの一般的な定式化を与え，6 章でそれを非一様性の進化に適用する．7 章ではマイクロ波背景放射の異方性にもどり，8 章では物質の大規模構造を取り上げる．重力レンズは後のほう，9 章において議論する．なぜなら，重力レンズのもっとも重要な応用は，弱い重力レンズ効果を用いた大規模構造の研究だと思うからである．4 章におけるインフレーションの議論ではインフレーション期における宇宙の平均的な性質のみを扱うが，10 章においてインフレーションに再びもどり，インフレーション期に生成された量子ゆらぎからの非一様性の成長を議論する．

私は本書を通じて，数値計算によって他所で得られた結果をたんに掲載したりせず，可能な限り，宇宙論的な現象の解析的な計算を与えようと試みた．過去の文献において，観測と理論を比較するのに使われている計算はどうしてもいくつかの細かい点を考慮する必要があり，それは解析的な取り扱いを不可能にするか，計算の主たる物理的な特徴をうやむやにしてしまう．私は，そのような場合には躊躇なく，計算の精度をある程度犠牲にして見通しの良さを選んだ．これは，6.2 節から 6.5 節における宇宙論的ゆらぎの流体力学的な扱いと，8 章における大規

模構造の扱いにおいてとりわけ顕著である．しかし，6.1 節と付録 H において，より正確な運動学理論の記述も与えておく．現代の宇宙論研究で用いられるコンピュータプログラムはこの運動学理論に基づいている．7 章では，両方の手法を宇宙マイクロ波背景放射に適用する．

60 年代から見ると，非常に多くのことが宇宙論に起こってきた．したがって，必然的に本書は，私の 1972 年の著作『重力と宇宙論』(Gravitational and Cosmology) とはまったく違うものになっている．本書で繰り返す必要がないと思われる部分では，場合に応じて以前の著作（以降 “G&C” と呼ぶ）を参照することとする．古典的な一般相対論に関していえば，それが実験的に確認され，より強固なものとなったことを別にすれば，1972 年から特に大きな変化がなかったため，本書で宇宙論に加えて重力も扱う必要性はないと思われた．しかしながら，一般相対論の知識をリフレッシュしたい読者に便利なように，そして私の記号の使い方を明らかにするために，一般相対論の手短かな紹介を付録 B に与えておく．その他の付録は，本書のあちこちで必要となる技術的事項について扱っている．また，本書の終わりに，いくつかの節にまたがって使われている記号の用語集，および例題集を挙げておく．

この本の分量を取り扱いに困らない程度に抑えるため，高度に思索的な事項は除外することにした．したがって，本書では高次元宇宙理論，人間原理的な考え方，ホログラフィー宇宙論，インフレーションの詳細に関する推論，その他の多くの新しいアイデアには立ち入らない．ひょっとするとこれらのうちのいくつかに関しては，今後の追加の巻に含むかもしれない．本書は，その大部分において，宇宙論の主流となったものに特化している．すなわち，一つか，あるいはそれ以上のスカラー場によって引き起こされたインフレーションがあり，その後放射，冷たい暗黒物質，バリオン物質，そして暗黒エネルギーに支配されたビッグバン宇宙となった，というシナリオである．

私は，本書で扱うトピックに関する議論は，200n 年（n は 1 から 7 までの整数で，この本の箇所に応じて変化する）までの最新情報だと考えている．これらの年までに書かれた天体物理学の関連する文献は完全に参照することを心がけたが，いくつかの論文を参照し忘れてしまったであろうことは疑うべくもない．たんに文献への参照がないからといって，私がその仕事を最初にしたと主張しているとは取らないでほしいが，いくつかの仕事に関してはおそらく最初であろう．私の

知り得る範囲で，コーネル大学のアーカイブ（http://arxiv.org）に投稿された論文への参照，および出版された文献への参照を含めておいた．いくつかの例ではコーネル大学のアーカイブ番号だけになったが，それはその論文がまだ出版されていなかったか，出版社に一度も投稿されなかったためである．本書では，私が知る限りの最新の宇宙論パラメータの測定結果を引用しているが，それは一つには読者に，現在観測的に何が可能であるかを感じてもらいたいからである．しかし，様々な異なる測定結果を組み合わせはしなかった．なぜなら，それが物理的理解の助けになるとは思わなかったし，それが良い一致を見たとしても，すぐに古い情報になると思ったからである．

テキサス大学の同僚たちにはずいぶんと助けてもらった．トーマス・バーンズ，フリッツ・ベネディクト，ウイリー・フィシュラー，カール・ゲブハート，パトリック・グリーン，リチャード・マツナー，ポール・シャピロ，クレイグ・ホイーラー，そして特にデュエイン・ダイカスはいくつかの数値計算を行ってくれ，多くの間違いを訂正してくれた．またここにあげた同僚に対する以上に，私は小松英一郎に感謝する．彼は原稿のすべてを読んでくれ，そして宇宙論研究に関して，けっして間違うことのない理解と情報の源であった．

作図と計算に関しては，私の研究補佐の学生ラファエル・フラウガーから多くの助けを得た．そして，莫大な量の誤りに関して，フラウガーと他の学生諸君，インユー・リー・ボレツ，カノクヮン・チャイチェルダスクル，ボー・リー，イアン・レーダラー，渡邉悠貴に注意してもらった．マシュー・アンダーソンは，宇宙論的元素合成に関する数値計算で助けてくれた．

また，特定のトピックに関しては，以下の諸氏，エド・バーチンガー，ディック・ボンド，レイサン・ボイル，ロバート・カーン，アラン・グース，ロバート・カーシュナー，アンドレイ・リンデ，エリック・リンダー，スラヴァ・ムカノフ，ソール・パールマター，ジョナサン・プリッチャード，アダム・リース，ウーロス・セルジェック，ポール・スタインハート，エドウィン・ターナー，マティアス・ザルダリアーガとのやりとりから多くを得た．さらに，ジャン・ダフィーとテリー・ライリーにも多くを助けてもらった．

もちろん，本書に残ったどんな誤りについても，私個人が責任を負う．もし読者が誤りに気づいたなら，どんなものでも良いから是非知らせて

ほしい．私はそれらを以下のウエブサイト：http://zippy.ph.utexas.edu/~weinberg/corrections.html に掲載しよう．

テキサス州オースティンにて
2007 年 6 月

[編集部より]
原著は一冊ですが，日本版では，上，下巻に分けています．上巻は，第 1 章～第 4 章，下巻は，第 5 章～第 10 章を収録しています．なお，巻末の付録などはそれぞれの巻で参照しているものになっていますが，上，下巻の双方から同一の付録を参照している場合，重なった収録となっています．この点ご理解下さい．

日本版によせて

Cosmology が日本の物理学者，天文学者，そして学生たちの手元に届いたことをとても嬉しく思います．本書で引用している論文の著者の名前を見れば，日本人科学者が宇宙論の発展に重要な役割を果たしてきたことがわかるでしょう．なかでも，最もすぐれた，生産的な科学者の一人である小松英一郎が本書の執筆を助けてくれ，また本書を日本語に翻訳してくれたことはとても幸運なことでした．

読者が本書を日本語で楽しむとともに，読者にとって有益であることを願っています．

テキサス州オースティンにて
スティーブン・ワインバーグ
2013 年 3 月 22 日

凡例

ラテン文字の添字 i, j, k 等は一般に 3 次元空間座標のラベルとし，たいていの場合 1, 2, 3 をとる．

ギリシャ文字の添字 μ, ν 等は一般に 4 次元時空座標のラベル 1, 2, 3, 0 とし，x^0 を時間座標とする．

特に明記のない限り，反復する添字に関しては和をとる．

平坦な時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ は対角行列で，その成分は $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{00} = -1$ とする．

空間的な 3 元ベクトルは太字で表す．

ベクトルの上に付与される記号 (ˆ) は，それぞれに対応する単位ベクトルを表す．すなわち，$\hat{v} \equiv \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ とする．

量の上に付与される点（˙）は，その量に関する時間微分を表す．

∇^2 はラプラシアン，$\dfrac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}$ である．

ベクトルとテンソルに対するものを除き，下付きの添字 0 は現在の時刻を表す．

密度，圧力，速度に付与する下付きの添字 B，D，γ，ν は，それぞれバリオンのプラズマ（核子と電子），冷たい暗黒物質，光子，ニュートリノを表すが，下付きの添字 M と R は，それぞれ非相対論的物質（バリオンのプラズマと冷たい暗黒物質）と放射（光子とニュートリノ）を表す．

行列またはベクトル A の複素共役，転置，およびエルミート共役は，それぞれ A^*，A^t，および $A^\dagger = A^{*t}$ と表す．方程式の最後尾の $+H.c.$ および $+c.c.$ は，それぞれ前の項のエルミート共役および複素共役を表す．

5 章より，記号の上に付与される横棒（¯）は，その記号の平均値を表す．

波数を参照する際，q はロバートソン–ウォーカー計量のスケール因子 $a(t)$ で任意に規格化された共動的な波数[訳注 1]とし，k は物理的な波数 $q/a(t)$ の現在の値 q/a_0 とする（補足：これは，k を共動的な波数として用いる慣習とは異なっている．文献では様々に異なる $a(t)$ の規格化が用いられている）．

特に明記のない限り，$\hbar$ と光速度を 1 とする自然単位系を用いる．全体を通し

訳注 1　物理的な波数に $a(t)$ をかけたもので，宇宙膨張とともにその値が変わらない波数のこと．

て $-e$ は電子の有理化単位系[訳注 2]における電荷とする．したがって，微細構造定数は $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$ となる．

引用する数値データの最後の括弧中に含まれる数字は，引用された数値の最後の桁における不定性を与える．

複数の節にまたがって使用される他の記号に関しては，275 ページの用語集を参照のこと．

[訳注 2] 距離 r だけ離れた 2 つの電荷間にはたらくクーロン力が $e^2/4\pi r^2$ となる単位系．

ワインバーグの
宇宙論 上
ビッグバン宇宙の進化

contents

ワインバーグの宇宙論 下
ゆらぎの形成と進化

contents

第1章
宇宙の膨張

観測可能な宇宙は，どの方向を見ても同じように見える．少なくとも，距離にして約 3 億光年よりも遠いところを観測するとそのように見える*1．2 章と 4 章で議論するように，この等方性は，宇宙マイクロ波背景放射ではさらに正確（およそ 10 万分の 1）である．そこで見るように，この放射は約 140 億年かけて我々のもとに届いており，十分に大きな距離では宇宙がどの方向を見てもほぼ同じであるという結論を支持している．

我々が宇宙の中で特別な位置を占めている，というのは考えにくいため，宇宙は，宇宙のいかなる点にいる観測者に対しても等方的に見えるはずだ．だが，実際にはすべての観測者に対して等方的に見えるとは限らない．我々の住む銀河系内を光速度の半分でぶっとばしている宇宙船から見ると，宇宙は等方的には見えない．そのような観測者は，進行方向からやってくる星の光や宇宙マイクロ波背景放射の強度が，後方からやってくるものと比べて非常に大きくなっていると観測するからである．等方性の仮定を定式化する際には，宇宙が，自由落下している「典型的な」観測者，すなわち，彼らの近傍にある典型的銀河の平均速度で動いている観測者から見て，あらゆる方向に対して同じである，としなければならない．つまり，（適当な時間の定義に対する）同時刻において，あらゆる典型的銀河を中心とする回転によってお互いの位置に移動できるすべての点では，状態は等しくなければならない．一方，宇宙のあらゆる点は，様々な典型的銀河を中心とするそのような回転を続けることで互いの位置に移動できるため，宇宙は一

---

*1 K. K. S. Wu, O. Lahav, M. J. Rees, *Nature*, **397**, 225 (1999). 相反する視点にたった文献は，Coleman, L. Pietronero, R. H. Sanders, *Astron. Astrophys.*, **200**, L32 (1988): L. Pietronero, M. Montuori, F. Sylos-Labini, in *Critical Dialogues in Cosmology*, World Scientific (1997): 24; F. Sylos-Labini, F. Montuori, L. Pietronero, *Phys. Rep.*, **293**, 61 (1998).

様でもある．すなわち，同時刻においては，あらゆる典型的銀河中の観測者はほぼ同じ状態を観測する[*2]．

宇宙が等方かつ一様であるという仮定により，時空の計量が単純な形となる座標系を選ぶことができる（1.1 節）．この計量は，アインシュタインの場の方程式の解としてフリードマン[*3]が最初に調べ，後にロバートソン[*4]とウォーカー[*5]が等方性と一様性の仮定のみから導いた．ほぼすべての現代宇宙論は，最低でも第 1 近似として，このロバートソン–ウォーカー計量を用いている．これらの仮定の観測的意義は 1.2 節から 1.4 節で議論するが，そこでは動力学的な仮定は一切用いない．1.5 節ではアインシュタインの場の方程式をロバートソン–ウォーカー計量に適用し，その帰結は 1.6 節から 1.13 節で調べる．

1.1　時空の幾何学

時空の計量を調べる前準備として，まず一様かつ等方な 3 次元空間の幾何学を考えよう．付録 B で議論するように，幾何学の情報は**計量** $g_{ij}(\boldsymbol{x})$（ここで i と j は 3 次元座標方向にとる），あるいは同等に**線素** $ds^2 \equiv g_{ij}\, dx^i\, dx^j$（反復する添え字に関しては和を取るものとする）に詰められている（ds は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ の間の**固有距離**と呼ばれるが，それは $\boldsymbol{x}$ のごく近傍で，デカルト座標系を使って測定される距離，という意味である）．一様かつ等方であり，長さが正定値をとる 3 次元空間の一例は平坦な空間であり，その線素は，

$$ds^2 = d\boldsymbol{x}^2 \tag{1.1.1}$$

で与えられる．この線素を不変に保つ座標変換は単純に，普通の 3 次元回転と並進である．もう一つの例は，ある半径 a を持つ，4 次元ユークリッド空間の球の表面であり，その線素は，

$$ds^2 = d\boldsymbol{x}^2 + dz^2, \qquad z^2 + \boldsymbol{x}^2 = a^2 \tag{1.1.2}$$

---

*2 スローン・デジタル・スカイサーベイ（SDSS, The Sloan Digital Sky Survey）は，銀河の分布が，約 3 億光年よりも大きなスケールに渡って一様である，という証拠を示した．文献は，J. Yadav, S. Bharadwaj, B. Pandey, T. R. Seshadri, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **364**, 601 (2005) [astro-ph/0504315].

*3 A. Friedmann, *Z. Phys.*, **10**, 377 (1922); *ibid.*, **21**, 326 (1924).

*4 H. P. Robertson, *Astrophys. J.*, **82**, 284 (1935); *ibid.*, **83**, 187, 257 (1936).

*5 A. G. Walker, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2) **42**, 90 (1936).

で与えられる．この線素を不変に保つ座標変換は**4 次元**の回転である．$\boldsymbol{x}$ の方向は，z 方向を変えない 4 次元の回転（それはすなわち普通の 3 次元回転である）により他のあらゆる方向に変えることができるが，$\boldsymbol{x}$ 自身は，z 方向を変える 4 次元回転により，他のあらゆる点に移動することができる．(座標変換の自由度を除いて）残された唯一の可能性は，4 次元の擬ユークリッド空間における超球面であることが証明できる*1．その線素は，

$$ds^2 = d\boldsymbol{x}^2 - dz^2, \qquad z^2 - \boldsymbol{x}^2 = a^2 \tag{1.1.3}$$

で与えられる．ここで，a^2 は（今のところ）任意の正の定数である．この線素を不変に保つ座標変換は，4 次元の擬回転である．この変換は，ちょうどローレンツ変換の時間を z に変えたものと同じである．

座標に，次のように定数をかけてみよう．

$$\boldsymbol{x}' \equiv \boldsymbol{x}/a, \qquad z' \equiv z/a. \tag{1.1.4}$$

球面の場合と超球面の場合において，プライム（$'$）を落とした線素は，

$$ds^2 = a^2\left[d\boldsymbol{x}^2 \pm dz^2\right], \qquad z^2 \pm \boldsymbol{x}^2 = 1 \tag{1.1.5}$$

と書ける．式 $z^2 \pm \boldsymbol{x}^2 = 1$ の微分は $zdz = \mp\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}$ であるから，

$$ds^2 = a^2\left[d\boldsymbol{x}^2 \pm \frac{(\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x})^2}{1\mp\boldsymbol{x}^2}\right] \tag{1.1.6}$$

である．この結果を以下のように書き換えることで，ユークリッド空間の場合を含むように一般化できる．

$$ds^2 = a^2\left[d\boldsymbol{x}^2 + K\frac{(\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x})^2}{1-K\boldsymbol{x}^2}\right], \tag{1.1.7}$$

ここで，

$$K = \begin{cases} +1 & \text{球面} \\ -1 & \text{超球面} \\ 0 & \text{ユークリッド空間} \end{cases} \tag{1.1.8}$$

である（定数 K はしばしば k のように書かれるが，波数や空間座標の添字に使う記号との混同を避けるため，本書では大文字を採用する）．点 $\boldsymbol{x} = 0$ において

---

*1 S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons (1972) [以下 G&C と引用する] の 13.2 節を参照のこと．

ds^2 が正，したがってすべての点において ds^2 が正となるためには，$a^2 > 0$ でなければいけないことに注意しよう．

この結果を時空の幾何学に拡張するには，時空の線素に式（1.1.7）で与えられる項を含めれば良い．ただし，a は時間の任意関数（ロバートソン–ウォーカースケール因子として知られる）である．時空の線素は，

$$d\tau^2 \equiv -g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t)\left[d\boldsymbol{x}^2 + K\frac{(\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x})^2}{1-K\boldsymbol{x}^2}\right] \tag{1.1.9}$$

で与えられる．定理*2により，この計量の形は座標変換の自由度を除けば一意に決まることが示されるが，その場合の条件は，典型的な銀河の中に住む天文学者のような自由落下する観測者に対し，宇宙が球対称で等方に見えることである．これらの座標系における計量の成分は，

$$g_{ij} = a^2(t)\left(\delta_{ij} + K\frac{x^i x^j}{1-K\boldsymbol{x}^2}\right), \quad g_{i0} = 0, \quad g_{00} = -1 \tag{1.1.10}$$

と与えられる．i と j は 1, 2, 3 の値を取り，$x^0 \equiv t$ は光速度を 1 とする自然単位系での時間座標である．準デカルト座標 x^i の代わりに球座標を使えば，3 次元空間の線素は，

$$d\boldsymbol{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega, \qquad d\Omega \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

と書けるから，時空の線素は，

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega\right] \tag{1.1.11}$$

で与えられ，この場合計量は対角行列となる．その成分は，

$$g_{rr} = \frac{a^2(t)}{1-Kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = a^2(t)r^2, \quad g_{\phi\phi} = a^2(t)r^2\sin^2\theta\ , \quad g_{00} = -1 \tag{1.1.12}$$

である．

1.5 節において，宇宙論の動力学方程式が $a(t)$ の規格化因子に依存するのは，$K/a^2(t)$ という項のみであることを示す．したがって，$K = 0$ の場合にはこの規格化因子は重要ではなく，問題になるのは異なる時刻における $a(t)$ の値の比のみである．

自由落下する粒子の運動方程式は付録 B の式（B.12）で与えられる．

---

*2 G&C, 13.5 節．

$$\frac{d^2x^\mu}{du^2} + \Gamma^\mu_{\nu\kappa}\frac{dx^\nu}{du}\frac{dx^\kappa}{du} = 0, \tag{1.1.13}$$

ここで $\Gamma^\mu_{\nu\kappa}$ はアフィン接続で，付録 B の式（B.13）で与えられ，

$$\Gamma^\mu_{\nu\kappa} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left[\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\lambda}\right] \tag{1.1.14}$$

となる．u は時空におけるある曲線に沿った位置を示す変数であり，質量を持った粒子に対しては τ に比例する（時空において式（1.1.13）を満たす軌跡 $x^\mu = x^\mu(u)$ は，**測地的**であるといわれる．それはつまり，積分 $\int d\tau$ が，軌跡のあらゆる微小な変化（ただし始点と終点は固定する）に対して定常的である，ということを意味する）．ここで，微分 $\partial_i g_{00}$ と $\dot{g}_{0i}$ がゼロであるため，$\Gamma^i_{00} = 0$ であることに着目しよう．これは，これらの座標系において静止している粒子は，常に静止し続けることを意味する．すなわち，**これらの座標系は共動座標系**であり，典型的な観測者の運動を記述するのに適している．また，$g_{00} = -1$ であるから，共動的な観測者の持つ時計が測定する固有時間の間隔 $(-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$ は単に dt であって，t は共動的な観測者が自身の静止系で測定する時間，ということになる．

ロバートソン–ウォーカースケール因子 a が持つ意味は，時間 t において，原点から動径方向の距離 r にある共動的な物体までの固有距離を測定することで理解できる．

$$d(r,t) = a(t)\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = a(t) \times \begin{cases} \sin^{-1} r & K=+1 \\ \sinh^{-1} r & K=-1 \\ r & K=0 \end{cases} . \tag{1.1.15}$$

この座標系では，共動的な物体の持つ動径座標 r は時間に依存しない．したがって，我々からその物体までの固有距離は $a(t)$ に応じて増加（あるいは減少）する．我々が宇宙に占める位置には何の特別な意味もないので，宇宙におけるあらゆる 2 つの共動的な物体の間の固有距離は必ず $a(t)$ に比例しなければならない．そのような固有距離の変化の割合は単に，

$$\dot{d} = d\,\dot{a}/a \tag{1.1.16}$$

で与えられる．次の節では，$a(t)$ が実は増加していることを見る．

ゼロでないアフィン接続（式（1.1.14））の成分も必要である．

$$\Gamma^0_{ij} = -\frac{1}{2}\Big(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}\Big) = a\dot{a}\left(\delta_{ij} + K\frac{x^i x^j}{1 - K\boldsymbol{x}^2}\right)$$
$$= a\dot{a}\tilde{g}_{ij}, \tag{1.1.17}$$
$$\Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2}g^{il}\Big(g_{l0,j} + g_{lj,0} - g_{0j,l}\Big) = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}, \tag{1.1.18}$$
$$\Gamma^i_{jl} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{im}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{jm}}{\partial x^l} + \frac{\partial \tilde{g}_{lm}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{g}_{jl}}{\partial x^m}\right) \equiv \tilde{\Gamma}^i_{jl}. \tag{1.1.19}$$

ここで，$\tilde{g}_{ij}$ は計量の純粋に空間的な成分，$\tilde{\Gamma}^i_{jl}$ はアフィン接続の純粋に空間的な成分，そして $\tilde{g}^{ij}$ は 3×3 行列 $\tilde{g}_{ij}$ の逆行列である．一般的に，$\tilde{g}^{ij}$ は 4×4 行列 $g_{\mu\nu}$ の逆行列の ij 成分とは異なることに注意しよう．準デカルト座標においては，

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + K\frac{x^i x^j}{1 - K\boldsymbol{x}^2}, \qquad \tilde{\Gamma}^i_{jl} = K\,\tilde{g}_{jl}x^i \tag{1.1.20}$$

と書ける．

これらのアフィン接続の成分を用いて，共動座標系で静止していない粒子の運動方程式を求めよう．まず，ゼロでない質量 m_0 を持つ粒子の運動量の変化率を計算する．以下の量を考えよう．

$$P \equiv m_0\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}}. \tag{1.1.21}$$

ここで，$d\tau^2 = dt^2 - g_{ij}dx^i dx^j$ である．局所的な慣性系では，デカルト座標を用いると $g_{ij} = \delta_{ij}$ と書け，$d\tau = dt\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}$ を得る．ここで，$v^i = dx^i/dt$ であるから，式（1.1.21）は運動量の大きさに関する特殊相対論の公式であることがわかる．一方，式（1.1.21）で与えられる量は**空間**座標の任意の変化に対して不変であるから，共動的なロバートソン–ウォーカー座標でその値を計算して良い．これは式（1.1.13）を用いて直接計算できるが，手っ取り早く答えを得るために，粒子の位置が原点（$x^i = 0$）近傍にあるような空間座標系を考えてみよう．このとき $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + O(\boldsymbol{x}^2)$ であるから，純粋に空間的なアフィン接続の成分 Γ^i_{jk} は無視することができる．一般相対論を用いて運動方程式は，

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -\frac{2}{a}\frac{da}{dt}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dt}{d\tau}$$

と書け，これに $d\tau/dt$ をかけることで，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right) = -\frac{2}{a}\frac{da}{dt}\frac{dx^i}{d\tau}$$

を得る．解は，

$$\frac{dx^i}{d\tau} \propto \frac{1}{a^2(t)} \tag{1.1.22}$$

となる．この結果を式（1.1.21）に代入し，計量 $g_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$ を用いることで，

$$P(t) \propto 1/a(t) \tag{1.1.23}$$

が導かれる．この結果は，ゼロでないあらゆる値の質量を持つ粒子に適用でき，その質量の値は運動量に比べていくら小さくても良い．したがって光子に関しても（光子の m_0 と $d\tau$ はゼロなのだが），式（1.1.23）を使って良い．

光子と物質粒子の軌跡を理解するのは，天文学の観測結果（とりわけ重力レンズ，第 9 章参照）を解釈する上で重要である．我々がいま用いている空間座標系の原点を通過する光子と物質粒子は，この座標系では直線上を進む．これはまた空間的な測地線，つまり以下の条件を満たす曲線である．

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \tilde{\mathit{\Gamma}}^i_{jl}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0, \tag{1.1.24}$$

ここで，ds は 3 次元の固有距離で，

$$ds^2 \equiv \tilde{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1.1.25}$$

で与えられる．しかし，測地線であるという性質は座標変換に対して不変である（なぜなら，それはあるベクトルがゼロであるという性質による）から，光子や物質粒子の軌跡は任意の空間座標系でも空間的な測地線であり，それは光子や物質粒子の軌跡が原点を通らない場合でも成り立つ.（これは以下のように示すことができる．式（1.1.17）と（1.1.18）を用いると，式（1.1.13）で与えられる光子あるいは物質粒子の運動方程式は，

$$0 = \frac{d^2x^i}{du^2} + \mathit{\Gamma}^i_{jl}\frac{dx^j}{du}\frac{dx^l}{du} + \frac{2\dot{a}}{a}\frac{dx^i}{du}\frac{dt}{du}, \tag{1.1.26}$$

$$0 = \frac{d^2t}{du^2} + a\dot{a}\tilde{g}_{ij}\frac{dx^i}{du}\frac{dx^j}{du} \tag{1.1.27}$$

と書ける．式（1.1.26）は，

$$0 = \left(\frac{ds}{du}\right)^2 \left[\frac{d^2x^i}{ds^2} + \mathit{\Gamma}^i_{jl}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^l}{ds}\right] + \left[\frac{d^2s}{du^2} + \frac{2\dot{a}}{a}\frac{dt}{du}\frac{ds}{du}\right]\frac{dx^i}{ds} \tag{1.1.28}$$

のように書き直せる．s はこれまでのところ任意である．もし s が式（1.1.25）で

与えられる空間的な固有距離であれば，

$$du^2 \propto d\tau^2 \propto dt^2 - a^2\, ds^2$$

を得る．両辺を du^2 で割り，u に関する微分を取り，式（1.1.27）を用いれば，

$$\frac{d^2 s}{du^2} + \frac{2\dot{a}}{a}\frac{dt}{du}\frac{ds}{du} = 0$$

を得る．したがって，式（1.1.28）は式（1.1.24）を与える）．

銀河の数密度の流れ（カレント）や，エネルギー–運動量テンソルのような，平均化され，その平均値が等方性と一様性の要請を満たすような，いくつかのベクトルやテンソル場を考えよう．等方性は，あらゆる 3 元ベクトル v^i の平均値が必ずゼロになることを要請し，一様性は，あらゆる 3 元スカラー（つまり，純粋に空間的な座標変換に対して不変である量）の平均値が，時間のみの関数であることを要請する．したがって，銀河やバリオン等の数密度の流れは，

$$J^i = 0, \qquad J^0 = n(t) \tag{1.1.29}$$

という成分を持ち，$n(t)$ は，共動する系における，単位固有体積あたりの銀河やバリオン等の数である．もしこの量が式（B.38）の意味で保存するのであれば[訳注 1]，

$$0 = J^\mu{}_{;\mu} = \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} J^\nu = \frac{dn}{dt} + \Gamma^i_{i0} n = \frac{dn}{dt} + 3\frac{da}{dt}\frac{n}{a}$$

を得るから，数密度の時間変化は，

$$n(t) = \frac{\text{定数}}{a^3(t)} \tag{1.1.30}$$

となる．これは，$a(t)$ が増加し，共動座標系を張る網目が膨張することで生じる数密度の減少を表している．

同様に，等方性はあらゆる 3 元テンソル t^{ij} の，$\boldsymbol{x} = 0$ における平均値が δ_{ij} に比例する，つまり g^{ij} に比例することを要請する（なぜなら g^{ij} は $\boldsymbol{x} = 0$ では $a^{-2}\delta_{ij}$ に等しい）．一様性は，その比例係数が時間の関数であることを要請する．これは，二つの 3 元テンソル t^{ij} と g^{ij} の間の比例関係であるから，任意の空間座標変換（g^{ij} の形を保ちつつ原点を他の点に移動するような変換を含む）に対して不変でなければならない．したがって，一様性と等方性は，エネルギー–運動量テンソルが**あらゆる場所で**以下の形をとることを要請する．

訳注 1　$J^\mu{}_{;\mu}$ のセミコロン（;）は共変微分を表す．ベクトル場の共変微分の定数は式（B.38），2 階のテンソル場の共変微分の定義は式（B.40）を参照．

$$T^{00} = \rho(t), \quad T^{0i} = 0, \quad T^{ij} = \tilde{g}^{ij}(\boldsymbol{x})\, a^{-2}(t)\, p(t). \tag{1.1.31}$$

（これらは，4 元速度ベクトルが $u^i = 0$, $u^0 = 1$ の場合に式（B.43）で与えられる，固有エネルギー密度 ρ と圧力 p の慣例的な定義である.）運動量保存則 $T^{i\mu}{}_{;\mu} = 0$ は，ロバートソン–ウォーカー計量と式（1.1.31）で与えられるエネルギー–運動量テンソルに対して自動的に満たされてはいるが，以下のような有用な情報を与える.

$$\begin{aligned} 0 = T^{0\mu}{}_{;\mu} &= \frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^0_{\mu\nu} T^{\nu\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} T^{0\nu} \\ &= \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \Gamma^0_{ij} T^{ij} + \Gamma^i_{i0} T^{00} = \frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a}\Big(p + \rho\Big), \end{aligned}$$

つまり，

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a}\Big(p + \rho\Big) = 0. \tag{1.1.32}$$

これは，以下のような形の状態方程式，

$$p = w\rho \tag{1.1.33}$$

に関して簡単に解くことができる．ここで，w は時間に依存しないとする．この場合，式（1.1.32）は，

$$\rho \propto a^{-3-3w} \tag{1.1.34}$$

を与える．この結果は，とりわけ以下のような，頻繁に登場する 3 つのケースに適用できる.

- **冷たい物質**（例：ダスト粒子）：$p = 0$

$$\rho \propto a^{-3} \tag{1.1.35}$$

- **熱い物質**（例：放射）：$p = \rho/3$

$$\rho \propto a^{-4} \tag{1.1.36}$$

- **真空のエネルギー**：1.5 節で見るように，$T^{\mu\nu} \propto g^{\mu\nu}$，つまりは $p = -\rho$ であるようなエネルギー–運動量テンソルが存在し，式（1.1.32）の解として ρ が時間に関して一定，つまり定数であると得られる．この解は（係数を除けば）**宇宙定数**あるいは**真空のエネルギー**として知られている.

これらの結果は，異なる成分間でエネルギーのやりとりがないことを仮定すれ

ば，共存する冷たい物質，熱い物質，そして宇宙定数に対して個別に適用できる．1.5 節において，これらの結果をアインシュタインの場の方程式と合わせて用いることで，宇宙膨張の動力学を理解する．

これまでは時空の局所的な性質のみを考えてきたが，ここでもっと大きな視点で時空の性質を見てみよう．$K = +1$ を持つ空間は有限であるが，あらゆる球体の表面がそうであるように，この空間は境界を持たない．式（1.1.7）を導くのに用いた座標系は，$K = +1$ では空間の半分（$z > 0$）しかカバーしていない．これは，地球を極（または，立体）射影で表した地図が，北半球か南半球どちらか一つしか表せないことと同じである．z が正も負もとれることを考慮すると，この空間の周は $2\pi a$ で，体積は $2\pi^2 a^3$ である．

$K = 0$ や $K = -1$ を持つ空間はたいてい無限であるとされているが，他の可能性も存在する．適当な周期条件を課すことで，同じ局所的幾何学を持ちつつも有限である空間が構築可能である．たとえば，$K = 0$ の場合において点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x} + n_1\boldsymbol{L}_1 + n_2\boldsymbol{L}_2 + n_3\boldsymbol{L}_3$ を同一視してみよう．ここで，n_1, n_2, n_3 は整数で，$\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2, \boldsymbol{L}_3$ はこの空間を特徴づける，互いに平行でない 3 元ベクトルである．この空間は有限であり，体積 $a^3\boldsymbol{L}_1 \cdot (\boldsymbol{L}_2 \times \boldsymbol{L}_3)$ を持つ．そのような空間では，十分に遠方を観測することで，正反対の方向に同一パターンの物質と放射の分布を発見できるはずである．そのような兆候は，観測された銀河の分布にも宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎにも見られないから，いかなる周期性も，もし存在するのであれば，$|\boldsymbol{L}_i|$ が 10^{10} 光年よりも大きなものでなければならない[*3]．

$K = -1$，$K = +1$，$K = 0$ に対する可能な周期条件のとりかたは無限個存在する[*4]．これらの可能性に関しては，とりたてて意味のある動機がないように思えるのでこれ以上は言及しない．周期条件を課せば，我々はロバートソン–ウォーカー計量を導く際に用いた最初の条件である回転対称性を破棄することになる（ただし，並進対称性は破棄する必要はない）．したがって，周期条件を課すのであれば，時空の局所的な幾何学をロバートソン–ウォーカー計量で記述されるものに限る理由はほとんどないであろう．

[*3] N. J. Cornish *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 201302 (2004); N. G. Phillips, A. Kogut, *Astrophys. J.*, **545**, 820 (2006) [astro-ph/0404400].

[*4] このトピックに関するレビューは，G. F. R. Ellis, *Gen. Rel. & Grav.*, **2**, 7 (1971); M. Lachièze-Rey, J.-P. Luminet, *Phys. Rept.*, **254**, 135 (1995); M. J. Rebouças, in *Proceedings of the Xth Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, eds. M. Novello, S. E. Perez Bergliaffa (American Institute of Physics Conference Proceedings, Vol. 782, New York, 2005): 188 [astro-ph/0504365].

1.2 宇宙論的赤方偏移

前の節で用いた一般的な議論は，ロバートソン–ウォーカー計量（式 1.1.9）に現れるスケール因子 $a(t)$ が増加するか，減少するか，あるいは一定であるかに関して何の制限も与えない．この情報は，遠方銀河のスペクトル線の周波数を地球の実験室で観測される値と比べて得られる，周波数のシフト（偏移）の測定によって得られる．

周波数のシフトを計算するため，ロバートソン–ウォーカー座標系を用い，我々を座標系の原点に置く．そして，動径方向に沿ってやって来る光線（$d\Omega = 0$）を考えよう．光線は $d\tau^2 = 0$ を満たすので，式（1.1.11）より，

$$dt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \tag{1.2.1}$$

が得られる．遠方の光源から原点方向にやって来る光線に対しては，t が増加すると r は減少するから，式（1.2.1）では負の符号を選ばねばならない．光が共動座標 r_1 にある光源を時刻 t_1 に出発し，原点 $r = 0$ に時刻 t_0 で到達したとすると，

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \tag{1.2.2}$$

を得る．両辺を微分し，光源の動径座標 r_1 が時間に依存しない（光源の運動は共動的だとする）ことを思い出せば，光信号が光源を出発したときの時間間隔 δt_1 は，光信号が原点の観測者に到着したときの時間間隔 δt_0 と次の関係があることがわかる．

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \tag{1.2.3}$$

もしこの「信号」が波の隣り合う山であれば，放射時の周波数は $\nu_1 = 1/\delta t_1$，観測時の周波数は $\nu_0 = 1/\delta t_0$ で与えられるから，

$$\nu_0/\nu_1 = a(t_1)/a(t_0) \tag{1.2.4}$$

を得る．$a(t)$ が増加すれば，これは赤方偏移，すなわち周波数が $a(t_1)/a(t_0)$ だけ減少する．対応する波長の増加は慣例的に $1 + z$ と表され，以下のように与えられる．

$$1 + z = a(t_0)/a(t_1). \tag{1.2.5}$$

逆に，もし $a(t)$ が減少すれば，これは青方偏移で，z が負であるから波長は式（1.2.5）で与えられる量だけ減少する．これらの結果は，よくドップラー効果として解釈されている．式（1.1.15）によれば，増加あるいは減少する $a(t)$ に対し，共動的な光源（たとえば銀河）までの固有距離は増加あるいは減少する．したがって，そのような光源は我々より遠ざかったり向かってきたりすることから，自然に赤方偏移や青方偏移が生じる．この理由から，ある赤方偏移（もしくは青方偏移）z を持つ銀河は，しばしば宇宙論的な動径速度 cz を持つという（相対速度としての解釈は $z \ll 1$ のときのみ明らかなので，$z > 1$ を持つ遠方銀河の存在は特殊相対論の破れを意味しない）．しかし，宇宙論的赤方偏移をドップラー効果とする解釈には限度がある．特に，放射から吸収までに生じた波長の増加は，放射時あるいは吸収時の $a(t)$ の変化率に依存せず，放射から吸収までの全期間に渡る $a(t)$ の増加で与えられることに注意しよう．

周波数のシフト（式（1.2.4））は，光の量子論を用いても理解できる．周波数 ν を持つ光の運動量は $h\nu/c$（h はプランク定数）で与えられるが，1.1 節で見たように，この運動量は $1/a(t)$ のように変化する．

近傍の光源に対しては $a(t)$ が冪展開できて，

$$a(t) \simeq a(t_0)\left[1 + (t - t_0)H_0 + \cdots\right], \tag{1.2.6}$$

ここで H_0 は**ハッブル定数**として知られる係数で

$$H_0 \equiv \dot{a}(t_0)/a(t_0) \tag{1.2.7}$$

である．式（1.2.5）は波長の相対的増加量として，

$$z = H_0\,(t_0 - t_1) + \cdots \tag{1.2.8}$$

を与える．近傍の物体に対しては，$t_0 - t_1$ は（$c = 1$ の単位系で）固有距離 d である．したがって，近似式（1.2.6）を使えるような近傍銀河に対しては，赤方偏移（$H_0 > 0$）や青方偏移（$H_0 < 0$）が，固有距離 d に比例して線形的に増加すると期待できる．

$$z = H_0 d + \cdots . \tag{1.2.9}$$

様々な銀河からの光の赤方偏移は，1910 年代，アリゾナ州フラッグスタッフのローウェル天文台で，ヴェスト・メルヴィン・スライファーによって最初に発見された．1922 年，彼は 41 個の渦巻き星雲を観測し，うち 36 個が正の z を持ち

(最大の値は $z = 0.006$), 5 個だけが負の z を持つことを発見した. 最も負の z を持っていたのはアンドロメダ星雲 M 31 で, $z = -0.001$ であった[*1]. 1918 年から 1925 年にかけて, C. ヴィルツと K. ルンドマーク[*2]は, 多くの渦巻き星雲の赤方偏移が距離とともに増加する傾向にあることを発見した. しかし, 1923 年になるまでは, 見かけの光度もしくは視直径を用いた観測からは渦巻き星雲の**相対的な**距離を見積もることしかできなかった. 絶対光度と物理的大きさが不明なままでは, 渦巻き星雲が我々の銀河系の一部であることさえ可能になり, 実際多くの天文学者がそれを信じていた. エドウィン・ハッブルは, 彼自身が 1923 年にアンドロメダ星雲 中に発見したセファイド変光星 (1.3 節で説明) を用い, アンドロメダ星雲の距離と大きさを見積った. それにより, 渦巻き星雲は我々の銀河系のような銀河であって, 銀河系内部に存在しないことが明らかになったのである.

赤方偏移と距離との間の線形関係は, スライファーやヴィルツ, ルンドマークによって得られた早期のデータでは明らかではなかった. その理由は, 現在に至るまでハッブル定数の測定を困難にしてきた, ある問題に起因している. 実際の銀河は, 一般的には宇宙膨張, あるいは収縮のみによって動くわけではない. 典型的な銀河は, 周囲の銀河や銀河間物質の重力場によって及ぼされる, 数百キロメール毎秒の「特異」速度を持っている. したがって, 赤方偏移と距離の間の線形関係を見るには, 赤方偏移による宇宙論的な速度が数千キロメール毎秒となる, $|z| \gg 10^{-3}$ を持つような銀河を研究する必要があった.

1929 年にハッブル[*3]は, 赤方偏移と距離との間に「おおよそ線形」な関係を見つけたと報告した. しかし, 当時の赤方偏移と距離は, おとめ座方向にある大規模な銀河団までの距離までしか測定されていなかった. 赤方偏移は典型的な特異速度と比べてさほど大きくなく, 動径速度にして 1000 km/s であった.

その後, ハッブルの時代から現在に至るまで, より大きな赤方偏移を持つ銀河が続々と発見されてきた. 赤方偏移が 1 程度の銀河が発見され, それらに対しては式 (1.2.9) のような冪展開は役に立たず, 1.4 節と 1.5 節で議論するように, 相対論的な効果を取り入れた公式を用いねばならない. 本書の執筆段階において,

---

[*1] V. M. Slipher, table prepared for A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, 2nd ed., Cambridge University Press (1924): 162.

[*2] C. Wirtz, *Astr. Nachr.*, **206**, 109 (1918); *ibid.*, **215**, 349 (1921); *ibid.*, **216**, 451 (1922); *ibid.*, **222**, 21 (1924); *Scientia*, **38**, 303 (1925); K. Lundmark, *Stock. Hand.*, **50**, No. 8 (1920); *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **84**, 747 (1924); *ibid.*, **85**, 865 (1925).

[*3] E. P. Hubble, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **15**, 168 (1929).

正確に測定された赤方偏移で最大のものは，すばる望遠鏡で観測された銀河のものである*4．この銀河から観測されたライマンアルファ線（水素原子が $2p$ から $1s$ 状態に遷移する際に放出される）は，通常は 1215 Å で紫外線領域にあるが，観測された波長は 9682 Å で赤外線領域であった．これより，赤方偏移として $1+z=9682/1215$，あるいは $z=6.96$ が得られた．

いずれ，個々の銀河の赤方偏移を 10 年間程度に渡って非常に正確に測定し，その変化を観測することで，現在よりも前の時刻 t における膨張率 $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ を測定できる日が来るかもしれない*5．式（1.2.5）を微分することで，赤方偏移の時間変化率が得られる．

$$\frac{dz}{dt_0} = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_1)} - \frac{a(t_0)\,\dot{a}(t_1)}{a^2(t_1)}\frac{dt_1}{dt_0} = \left[H_0 - H(t_1)\frac{dt_1}{dt_0}\right](1+z).$$

式（1.2.3）を導く際に用いたのと同じ議論により $dt_1/dt_0 = 1/(1+z)$ であるから，もし dz/dt_0 を測定できれば，光が発せられた時刻での膨張率が公式，

$$H(t_1) = H_0(1+z) - \frac{dz}{dt_0} \tag{1.2.10}$$

から導き出せる．

1.3　小さな赤方偏移における距離：ハッブル定数

天文学では距離がどのように測定されるのかを考えよう．本節では，z が 0.1 よりそれほど大きくない，比較的近傍の天体を考える．したがって，時空の曲率や宇宙膨張が距離に与える影響は無視できる．これらの測定は宇宙論にとって重要である．というのは，これらの測定がハッブル定数の値 H_0 を決めるのに使えるからである．さらに，$a(t)$ の関数形を決めるのに使われる，より大きな赤方偏移の測定は，“標準光源” と呼ばれる光度がわかっている天体の観測に依存しており，そのような標準光源は赤方偏移の比較的小さなところで同定，そして較正する必要がある．1.4 節と 1.5 節で，非常に遠方の天体の距離測定に対して宇宙膨張と時空の曲率が与える影響を解析したあと，1.6 節で大きな赤方偏移での距離測定を議論する．

---

*4 M. Iye *et al.*, *Nature*, **443**, 186 (2006) [astro-ph/0609393].

*5 A. Loeb, *Astrophys. J.*, **499**, L111 (1998) [astro-ph/9802122]; P-S. Corasaniti, D. Huterer, A. Melchiorri, *Phys. Rev. D*, **75**, 062001 (2007) [astro-ph/0701433]. このトピックに関するより早期の仕事は，A. Sandage, *Astrophys. J.*, **139**, 319 (1962) を見よ．

宇宙論では，距離測定に用いられる天体は慣例的に1次と2次の距離指標に分類される．我々の銀河系が属する，局所銀河群中にある1次の距離指標となる天体の絶対光度は，運動学的な手法を用いて直接測定されるか，あるいは，運動学的手法で距離のわかっている他の1次の距離指標と関連づけることで間接的に測定される．これら比較的近傍の1次の距離指標が十分にたくさんあれば，絶対光度を様々な観測量と結びつけるような経験則を見つけることができるだろう．ただ，不幸にして，1次の距離指標はそれほど明るくないため，宇宙論的速度 cz が銀河速度と宇宙の膨張速度の典型的なずれ（2–300キロメートル毎秒）よりも大きくなるような，z が0.01を超えるような距離にあるときは観測できない．すると，1次の距離指標を用いて $a(t)$ を直接測定することはできないので，遠方でも見ることのできる，十分に明るい2次の距離指標が必要になる．これらの絶対光度は，より近傍にある1次の距離指標と関連づけることで決定できる．

1次の距離指標*1

天文学では，ほとんどすべての距離測定は結局のところ，我々の住む銀河系中の天体に対して以下の2つの古典的な運動学的手法のどちらかを用いて測定された距離に基づいている．

1．三角視差

太陽をまわる地球の動きにより，恒星の見かけの位置は毎年きまって楕円を描く．その最大の半径 π は，

$$\pi = \frac{d_{\mathrm{E}}}{d} \tag{1.3.1}$$

で与えられ，単位はラジアンである（この式は $\pi \ll 1$ のときのみ成り立つが，それはすべての恒星に対して成り立っている）．

ここで，d は太陽系から恒星までの距離で，d_{E} は**天文単位**，$1\,\mathrm{AU} = 1.496 \times 10^8$ km，として定義される太陽から地球までの平均距離である*2．1パーセク（pc）は，$\pi = 1''$ を与える距離として定義される．1ラジアンは206264.8秒角であるから，

$$1\,\mathrm{pc} = 206264.8\,\mathrm{AU} = 3.0856 \times 10^{13}\,\mathrm{km} = 3.2616\,\text{光年}.$$

*1 このトピックに関するレビューは，M. Feast, in *Nearby Large-Scale Structures and the Zone of Avoidance*, eds.A. P. Fairall, P. Woudt, ASP Conference Series (2005)[astro-ph/0405440].

秒角の単位で表した視差は，パーセクの単位で表した距離の逆数である．

三角視差によってその距離が測定された最初の恒星は，1832 年のトーマス・ヘンダーソンによるアルファ・ケンタウリ，そして 1838 年のフリードリヒ・ヴィルヘルム・ベッセルによるはくちょう座 61 番星である．これらの恒星までの距離は，それぞれ 1.35 pc と 3.48 pc である．地球大気の影響のため，$0.03''$ より小さい三角視差を地上の望遠鏡で測定するのは極めて困難である．そのため何年もの間，この手法では 30 pc 程度の恒星に対してしか距離を求めることができなかった．このような距離では恒星の数は限られており，また精度も悪かった．

この状況は，ヒッパルコスという名で知られる欧州宇宙機関の天文衛星の打ち上げによって改善した．この衛星は，銀河系内の多くの恒星の見かけの位置と光度を測定するのに用いられ[*3]，十分に明るい恒星に対してなら，視差は（標準偏差で）7 から 9×10^{-4} 秒角の範囲で測定することができた．この手法により，ヒッパルコスカタログの中の 118000 個の恒星のうち，約 20000 個の恒星の距離が 10%より良い精度で求められた．

2. 固有運動

距離 d にあり，視線方向に対して垂直な速度成分 $v_\perp$ を持つ光源は，天球上を速さ μ（単位はラジアン/時間）で横切って進むように見える．ここで μ は，

$$\mu = v_\perp / d \tag{1.3.2}$$

で与えられ，**固有運動**として知られている．もちろん，天文学者はたいていの場合，横向きの速度 $v_\perp$ を直接測定する術を持っていない．しかし，視線方向の速度成分 v_r は光源のスペクトル線のドップラーシフトによって測定できる．問題は，いかにして v_r の測定値から $v_\perp$ を見積もるか，ということである．これは，

---

*2　（15 ページ）太陽系における距離の測定の歴史は，サモスのアリスタルコス（310B.C.–230B.C.）まで遡る．彼は，月食の際に測定した地球の影の幅と月の視直径の比から月と地球の直径の比を求め，月の視直径から月の直径と月までの距離の比を求め，月が半月のときの太陽と月の離角から太陽と月までの距離の比を求めた．このようにして，彼は太陽までの距離を地球の直径を単位として求めることができた．アリスタルコスの手法は正しいものであったが，観測データは質が良くなく，彼の求めた太陽までの距離はあまりに小さすぎるものだった（アリスタルコス以前のギリシャ天文学の解説，およびアリスタルコスの仕事の翻訳は，L. Heath, *Aristarchus of Samos*, Oxford University Press, (1913) を参照）．それなりに正確な地球から太陽までの距離の決定は，視差の測定によって初めてなされた．1672 年，ジャン・リシェとジョヴァンニ・ドメニコ・カッシーニは，6000 マイル離れたパリとカイエンヌから見た火星の見かけの方向の差を観測することで，地球から火星までの距離を測定した．これより，地球から太陽までの距離を見積もることができるようになった．現在，太陽系内の距離は，惑星からのレーダー波の反射波，および宇宙船に積まれたトランスポンダーからの電波の到達時間を測定することで非常に正確にわかっている．

*3　M. A. C. Perryman *et al.*, *Astron. Astrophys.*, **323**, L49 (1997).

いくつかの特殊な場合には可能である.

- 運動星団は，同時期に生まれ，そのため同じ速度で互いに平行に進む恒星の集団である（これらは**散開星団**，つまり自身の重力によって束縛されていない星団であり，より大きな（その球状の形が示すように）重力によって束縛されている球状星団とは区別される）．このような運動星団の中でも最も重要なのがヒヤデス星団（テニスンの詩『ユリシーズ』では「雨のヒヤデス」と詠まれた）で，100 個以上の恒星から成っている．これらの星の視線方向の速度はドップラーシフトによって測定できる．ここで，もしこの星団までの距離がわかっているなら，視線方向に垂直な速度成分は固有運動から求められるだろう．以前は，星団を構成する星のすべてが平行に動いているという要請を課すことにより，ヒヤデス星団までの距離は 40 pc 程度と求められていた．このような方法で求められた距離は**運動星団視差**と呼ばれる．ヒッパルコス衛星の登場以降は，ヒヤデスを含むいくつかの散開星団に対し，運動星団法は三角視差による直接測定によって補われるようになった.
- 二つ目の方法は，**相対的な**距離がわかっている恒星のサンプルの，ドップラーシフトと固有運動の統計解析に基づくものである．相対的な距離がわかる場合としては，たとえばすべての恒星が同じ絶対光度を持っているとか（ただし，絶対光度の値自身は不定），あるいはすべての恒星が同じ距離にいるとか（ただし，距離の値自身は不定）が考えられる．ドップラーシフトは視線方向の速度を与え，固有運動と相対距離は（不定な絶対光度，あるいは距離に関する全体の規格化因子を除けば）視線方向に垂直な方向の速度を与える．視線方向に垂直な方向の速度分布が視線方向の速度分布と同じであるとすれば，この不定な規格化因子を決定できる．このような方法で求められた距離は，しばしば**統計視差**とか**力学的距離**と呼ばれる.
- セファイド変光星であるふたご座ゼータ星の距離は，ドップラーシフトで求めたその物理的大きさの変化率と，光学干渉計で求めた視直径の変化率を比べることで測定された[*4]（セファイド変光星に関しては，以下でより詳しく述べる）．その距離は 336 ± 44 pc で，三角視差で求めうるものより非常に大きい．この手法は，その後，他の 8 個のセファイド変光星に適用された[*5].

---

*4 B. F. Lane, M. J. Kuchner, A. F. Boden, M. Creech-Eakman, S. B. Kulkarni, *Nature*, **407**, 485 (2000).

*5 P. Kervella *et al.*, *Astron. Astrophys.*, **423**, 327 (2004) [astro-ph/0404179].

• 超新星によって放出される物質の固有運動を測定することで，その距離を求めることが可能になりつつある．仮定するのは，超新星が円筒対称な爆発で横向きの速度 $v_\perp$ がドップラーシフトで求めた動径方向の速度 v_r から求まる，ということである．この手法は 1987 年に大マゼラン雲で観測された超新星 SN1987A のまわりのリングに適用され[*6]，距離は 52 kpc と求められた（ここで，kpc は千パーセクである）．

• ある質量を中心とした軌道上にある天体の，時間変動するドップラーシフトおよび固有運動の測定により，その天体への距離が求められる．たとえば，もし視線方向が天体の軌道平面上にあり，かつその軌道が円軌道なら，ドップラーシフトはその天体が視線方向に沿って動くときに最大となり，軌道速度 ν を与える．一方で固有運動 μ は，その天体が視線方向と垂直に速度 ν で動くときに最大となる．したがって，これらの比 ν/μ から距離が得られる．この手法は，ドップラーシフトと固有運動の時間変動を調べることで，軌道平面が視線方向から傾いていたり，軌道が円軌道でない場合にも適用することができる．この手法を銀河系中心にあるブラックホールのまわりを回っている恒星 S2 に適用して得られた距離は，現在，太陽系から銀河中心までの距離の測定値の中で最も正確であり[*7]，その値は 8.0 ± 0.4 kpc である．また，この手法を，他の銀河の中心に存在するブラックホールまわりの，ガスやダストでできた降着円盤中にある「メーザー」（マイクロ波を放射する点源）に用いることで，銀河系外にあるいくつかの天体の距離を測定できる．軌道速度は，降着円盤の端にあって我々にまっすぐ向かう，もしくは我々からまっすぐ遠ざかるメーザーのドップラーシフトから求まる．もしこの軌道速度が，メーザーが視線方向に垂直に動く際の速度と同じであれば，この軌道速度と観測された固有運動の比から距離がわかる．これまでに，この手法は銀河 NGC 4258 への距離[*8]，7.2 ± 0.5 Mpc（Mpc は百万パーセク），および銀河 M 33 への距離[*9]，0.730 ± 0.168 Mpc，を求めるのに使われた．

これらの運動学的手法は，太陽系近傍より外側ではあまり使えない．そのため，より大きな距離を測定するには異なる手法が必要となる．

---

*6 N. Panagia, *Mem. Soc. Astron. Italiana*, **69**, 225 (1998).

*7 F. Eisenhauer *et al.*, *Astrophys. J. Lett.*, **597**, L121 (2003) [astro-ph/0306220].

*8 J. Herrnstein *et al.*, *Nature*, **400**, 539 (1999).

*9 A. Brunthaler, M. J. Reid, H. Falcke, L. J. Greenhill, C. Henkel, *Science*, **307**, 1440 (2005) [astro-ph/0503058].

3. 見かけの光度

宇宙論で距離決定に最も良く使われる手法は，既知の（あるいは既知と思われる）絶対光度を持つ天体の，見かけの光度を用いるものである．絶対光度 L は1秒あたりに放射されるエネルギー量で，見かけの光度 ℓ は1秒あたりに1平方センチメールの面積で受け取るエネルギー量である．もしエネルギーが等方的に放射されるなら，ユークリッド幾何学における絶対光度と見かけの光度との関係を以下のように導くことができる．ある光源が，その光源から地球までの距離 d に等しい半径を持つ球で囲まれていると想像してみよう．1秒あたりにその球を通過する全エネルギー量は $4\pi d^2 \ell$ であるから，

$$\ell = \frac{L}{4\pi d^2} \tag{1.3.3}$$

が得られる．この関係式は星間物質や銀河間物質による吸収，あるいは光源の非等方性があれば修正が必要である．そのような修正は実用上重要であるが，たくさんの技術的な問題を考慮しなくてはいけないため，これ以上は立ち入らない．

ところで，天文学者は，見かけの光度や絶対光度の代わりに伝統的な量である見かけの**等級**と絶対**等級**を使っている[*10]．紀元2世紀，アレクサンドリアの天文学者クラウディオス・プトレマイオスは1022個の恒星のリストを出版し，それぞれの星を見かけの明るさに応じて最も明るい星を1等星，肉眼でどうにか見える星を6等星と分類した[*11]．この伝統的な明るさの尺度は，1856年にノーマン・ポグソンによって定量的に改良された．彼は，5等級違えば見かけの光度は100倍違うべし，つまり $\ell \propto 10^{-2m/5}$ であるべしと決めた．そして，20世紀初めの写真乾板の到来により，この関係式の比例係数を決めることが可能となった．

見かけの放射（すなわち，すべての波長を含んだ）光度と見かけの放射等級 m の関係は次のように与えられる．

$$\ell = 10^{-2m/5} \times 2.52 \times 10^{-5}\ \mathrm{erg\ cm^{-2}\ s^{-1}}. \tag{1.3.4}$$

例を挙げると，シリウスの実視等級は $m_{\text{可視}} = -1.44$ 等，アンドロメダ星雲 M 31 は $m_{\text{可視}} = 0.1$ 等，そして我々に最も近い銀河団の中にある大きな銀河 M 87 は

[*10] 見かけの等級に関する歴史については，J.B. Hearnshaw, *The Measurement of Starlight: Two centuries of astronomical photometry*, Cambridge University Press (1996); K. Krisciunas [astro-ph/0106313].

[*11] プトレマイオスの星表に関しては，M. R. Cohen, I. E. Drabkin, *A Source Book in Greek Science*, Harvard University Press (1948): 131 ページを見よ．

$m_{可視} = 8.9$ 等である．絶対等級はどの波長域においても，天体が 10 pc にあった場合に持つであろう見かけの等級として定義されている．したがって，放射絶対光度と放射絶対等級 M の関係は次のように与えられる．

$$L = 10^{-2M/5} \times 3.02 \times 10^{35} \mathrm{erg\ s^{-1}}. \tag{1.3.5}$$

すると，絶対実視等級 $M_{可視}$ は太陽が+4.82 等，シリウスが+1.45 等，そして銀河系は −20.3 等になる．式（1.3.3）はまた，距離と**距離指数** $m - M$ との関係式としても書ける．

$$d = 10^{1+(m-M)/5} \mathrm{pc}. \tag{1.3.6}$$

見かけの光度の観測に基づく距離測定に使われた恒星には，次の種類がある．

● **主系列**：星の中心における核反応で水素を燃焼している恒星は，絶対光度と色（両者とも星の質量に依存する）との間に特徴的な関係がある．これは主系列として知られ，第 1 次世界大戦の 10 年前にアイナー・ヘルツシュプルングとヘンリー・ノリス・ラッセルによって発見された．光度は青白い星が最大で，黄色から赤色になるにつれ徐々に下がってゆく．主系列の**形状**は，星団の中にあるたくさんの恒星の見かけの明るさと色を観測することで得られる．というのも，一つの星団に属する恒星はすべて我々から同じ距離にあるとみなせるからである．しかし，主系列の絶対光度を知るには星団の距離を知らねばならない．長年に渡り，主系列の絶対光度の較正は，上述の運動星団法によって距離のわかっているヒヤデス星団の 100 個程度の主系列星の観測に基づいていた．その後ヒッパルコス衛星が登場したことにより，主系列の較正は，三角視差で距離が測定された 10 万個近くの主系列星の観測を通じて大幅に改善した．このサンプルにはヒヤデス，プレセペ，プレアデス，NGC 2516 といった散開星団に属する恒星が含まれており，その化学的組成の違いを注意すれば，これらの星団から求められた主系列の絶対等級は互いに一致する[*12]．主系列をこのような手法で較正しておけば，見かけの光度と色との間に主系列の関係を示す恒星が存在する星団や銀河への距離を，式（1.3.3）を用いて求めることができる．このような手法で求めた距離はしばしば**測光視差**として知られる．

ヒッパルコスの観測で得られた視差のデータ解析から，主系列星の観測による

[*12] S. M. Percival, M. Salaris, D. Kilkenny, *Astron. Astrophys.*, **400**, 541 (2003) [astro-ph/0301219].

プレアデス星団の距離と，三角視差から得られたものとの間に食い違いがあることがわかった[*13]．ヒヤデス星団に運動星団法を使って得られる主系列の較正によれば，プレアデス星団までの距離[*14]は 132 ± 4 pc である．一方，ヒッパルコス衛星によって測定されたプレアデス星団中の恒星による三角視差によれば，その距離[*15]は 118 ± 4 pc で，主系列法で得られた結果と矛盾する．最近になって，ヒッパルコスの視差は，ハッブル宇宙望遠鏡に搭載された微細誘導センサー (Fine Guidance Sensor)[*16]によって得られた，プレアデス星団の 3 つの恒星に対するさらに正確な視差と矛盾することがわかった．ハッブル宇宙望遠鏡の値は 133.5 ± 1.2 pc で，主系列法の結果とよく一致する．本書の執筆段階において，天文学界の多くは，主系列の測光で与えられた距離を支持している[*17]．

- **レッドクランプ星**：銀河のなかで金属量[*18]の豊富な部分にある星団の色–等級図は，実視等級にして 0.2 等程度の幅しかない小さな領域に，はっきりとした赤色巨星の固まりを示す．これらの恒星は中心で水素が枯渇し，核反応の燃料としてヘリウムを燃焼している．このようなレッドクランプ星の，赤外線（波長にして約 800 nm）における絶対等級[*19]は $M_I = -0.28 \pm 0.2$ 等と求められている．この値はヒッパルコス衛星，およびそれよりも早い時期のサーベイ観測で測定された距離と見かけの等級から得られたものである[*20]．この波長帯でのレッドクランプ星の絶対等級は色にほとんど依存しないが，金属量には依存するという指摘がある[*21]．

- **RR ライリ星**：RR ライリ星は，何十年にも渡って距離指標として用いられてきた変光星である[*22]．これらは周期によって分けられ，典型的には 0.2 から 0.8

---

*13 B. Paczynski, *Nature*, **227**, 299 (2004).

*14 G. Meynet, J.-C. Mermilliod, A. Maeder, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **98**, 477 (1993).

*15 J.-C. Mermilliod, C. Turon, N. Robichon, F. Arenouo, Y. Lebreton, in *ESA SP*-402 *Hipparcos–Venice* '97, eds. M.A.C. Perryman, P. L. Bernacca, European Space Agency (1997), 643; F. van Leeuwen, C. S. Hansen Ruiz, *ibid*, 689; F. van Leeuwen, *Astron. Astrophys.*, **341**, L71 (1999).

*16 D. R. Soderblom *et al.*, *Astron. J.*, **129**, 1616 (2005) [astro-ph/0412093].

*17 ヒッパルコスの生データの新しい解析が，F. van Leeuwen, E. Fantino, *Astron. Astrophys.*, **439**, 791 (2005) [astro-ph/0505432] に与えられている．

*18 天文学者は，「金属」という言葉をヘリウムより重い（原子番号の大きい）元素に用いる．

*19 B. Paczyński, K. Z. Stanek, *Astrophys. J.*, **494**, L219 (1998).

*20 A. Udalski *et al.*, *Acta. Astron.*, **42**, 253 (1992).

*21 L. Girardi, M. A. T. Groenewegen, A. Weiss, M. Salaris [astro-ph/9805127].

*22 レビューは，G. Bono, *Lect. Notes Phys.*, **635**, 85 (2003) [astro-ph/0305102].

日周期である．統計視差，三角視差や運動星団法から（地上望遠鏡とヒッパルコス衛星のデータの両方を用いて）得られた，銀河系のハローにあるRRライリ星の絶対実視等級は，それぞれ[*23]0.77 ± 0.13等，0.71 ± 0.15等，そして0.67 ± 0.10等であり，より早期に得られていた結果[*24]である，銀河系ハロー中のRRライリ星の $M_{可視} = 0.71 \pm 0.12$ 等，および銀河系円盤中のRRライリ星の0.79 ± 0.30等に近い．RRライリ星のほとんどは三角視差を測定するには遠すぎるが，ハッブル宇宙望遠鏡による最近の測定[*25]では，RRライリ星そのものに対する三角視差を 3.82×10^{-3} 秒角と測定し，それより絶対実視等級 $0.61^{-0.11}_{+0.10}$ 等を得ている．

- **食連星**：条件が許せば，小さな伴星による周期的な部分食を受けている恒星の本来の光度は，他の距離指標に一切頼らず推定することができる．伴星の速度はそのスペクトル線のドップラーシフトから求められ，軌道の離心率はドップラーシフトの時間変動から求められ，主星の半径は食の期間から計算できる．主星の温度はスペクトルの観測，たいていは様々な波長帯における見かけの光度の観測から得られる．主星の半径（よって表面積）および温度がわかれば，その絶対光度は黒体放射のシュテファン–ボルツマン則から計算できる．この手法は，銀河系近傍にある二つの矮小銀河，大マゼラン雲（LMC）[*26]と小マゼラン雲（SMC）[*27]，およびアンドロメダ銀河M 31[*28]とその伴銀河M 33[*29]への距離の測定に適用されている．

- **セファイド変光星**：セファイド変光星は非常に明るいため，銀河系外の距離を測るのに使われる恒星の中で最も重要な位置を占めている．この種の変光星として最初に発見されたケフェウス（セフェウス）座デルタ星にちなんで名付けられたこの変光星は，2日から45日周期という光度の特徴的な時間変動によって識別

---

*23 P. Popowski, A. Gould, *Astrophys. J.*, **506**, 259, 271 (1998); [astro-ph/9703140]; [astro-ph/9802168]; *Post-Hipparcos Cosmic Candles*, eds. A. Heck, F. Caputo, Kluwer Academic Publisher [astro-ph/9808006]; A. Gould, P. Popowski, *Astrophys. J.*, **568**, 544 (1998) [astro-ph/9805176]; そこで引用されている文献も見よ．

*24 A. Layden, R. B. Hanson, S. L. Hawley, A. R. Klemola, C. J. Hanley, *Astron. J.*, **112**, 2110 (1996).

*25 G. F. Benedict *et al.*, *Astrophys. J.*, **123**, 473 (2001) [astro-ph/0110271]

*26 E. F. Guinan *et al.*, *Astrophys. J.*, **509**, L21 (1998); E. L. Fitzpatrick *et al. Astrophys. J.*, **587**, 685 (2003).

*27 T. J. Harries, R. W. Hilditch, I. D. Howarth, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **339**, 157 (2003); R. W. Hilditch, I. D. Howarth, T. J. Harries, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **357**, 304 (2005).

*28 I. Ribas *et al.*, *Astrophys. J.*, **635**, L37 (2005).

*29 A. Z. Bonanos *et al.*, *Astrophys. Space Sci.*, **304**, 207 (2006) [astro-ph/0606279].

できる（他の銀河で見つかったセファイド変光星の中には，周期が100日くらいのものまで確認されている）．1912年，ヘンリエッタ・スワン・リーヴィットは，小マゼラン雲（SMC）にあるセファイド変光星の見かけの光度の変動が，周期を変数とするある滑らかな関数で書けることを発見した．しかしこのとき，SMCまでの距離は不明であった．その後，散開星団中のいくつかのセファイド変光星の距離と見かけの光度（よって絶対光度）が測定されるに至り，周期と光度の関係を較正できるようになった．こうしてセファイド変光星は「標準光源」となり，セファイド変光星が観測できるほど近ければ，あらゆる銀河に対して距離が測定可能になった．M 31におけるセファイド変光星の発見，およびリーヴィットによるセファイド変光星の周期–光度関係の較正があったからこそ，エドウィン・ハッブルはM 31の距離を測定することができ，それが銀河系のはるか外側にある，つまりはM 31が銀河系と同じような銀河であると示すことができたのである．

現在では，セファイド変光星の周期–光度関係は主に大マゼラン雲（LMC）から導かれており，そこではたくさんのセファイド変光星が見つかっていて，絶対光度の色依存性も考慮されている．したがって，セファイド変光星の絶対光度の較正は，LMCへの距離の測定と言い換えることもできる（実際，セファイド変光星の絶対光度の較正はLMCの距離測定に帰着する）．主系列星の測光および他の手法から得られ，長年にわたって一般的に受け入れられてきたLMCの距離指数は18.5等で，式（1.3.6）よりこれは 5.0×10^4 pcに相当することがわかる．レッドクランプ星を用いた手法[*30]では，距離指数18.47等，統計誤差 ± 0.01 等，系統誤差 $^{+0.05}_{-0.06}$ 等が得られた．LMCにおけるセファイド変光星の膨大なカタログ[*31]は，ハッブル宇宙望遠鏡の基幹プロジェクト（Hubble Space Telescope Key Project）[*32]のメンバーによって解析され，周期 P（単位は日数）とセファイド変光星の可視域（V バンド）M_V と赤外域 M_I での絶対等級の関係式が与えられた．

$$M_V = -2.760 \log_{10} P - 1.458, \qquad M_I = -2.962 \log_{10} P - 1.942. \tag{1.3.7}$$

この関係式は，LMCの距離指数が18.5等であるという仮定のもとで導かれている．

---

*30 M. Salaris, S. Percival, L. Girardi, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **345**, 1030 (2003) [astro-ph/0307329].

*31 A. Udalski *et al.*, *Acta Astr.*, **49**, 201 (1999): 表1.

*32 W. L. Freedman *et al.*, *Astrophys. J.*, **553**, 47 (2001).

この結果に対して，異なる二つの方向から問題点が指摘されていて，この種の距離測定がいかに困難であるかを物語っている．

一つ目は，LMC の距離の測定値には，食い違うものが存在することである．LMC 中のレッドクランプ星が銀河系円盤のものと同じ赤外線光度を持つと仮定すると，それから得られる距離指数は 0.45 等低いもの[*33]となり，LMC の距離は 0.8 倍と小さくなる．一方，LMC の恒星が銀河系円盤のものよりも明らかに金属量が低いという根拠もあって，このことを考慮した二つの研究グループ[*34]は，以前受け入れられていた値とそれなりによく一致する値，18.36 ± 0.17 等と 18.28 ± 0.18 等を得た．この結果はまた，RR ライリ星の観測から得た LMC の距離指数[*35]18.33 ± 0.06 等とも一致する．この LMC の距離指数は，食連星 HV2274 の距離測定によってさらに確認され，この食連星の LMC の中心からの距離を考慮すると，LMC の距離指数として 18.30 ± 0.07 等が得られた[*36]．

二つ目に，セファイド変光星の周期–光度関係の較正が新しくなされたことにもよる．この較正は LMC のセファイド変光星を用いていないため，逆に LMC のセファイド変光星に適用することで LMC の距離を独立に求めることができる[*37]．近年，ヒッパルコス衛星[*38]が銀河系のセファイド変光星 223 個の三角視差を測定した．そのうちほぼ 200 個に対し，主系列星やレッドクランプ星，RR ライリ星によらずに周期–光度関係を較正することができた．最も近いセファイド変光星でも 100 pc 以上離れており（北極星までの距離は 130 pc），視差はたったの 2–3 ミリ秒角である．そのため個々の測定はそれほど正確ではないけれども，約 200 個のセファイド変光星の測定を平均することでかなり良い精度が得られた．初期の結果[*39]では，V バンドの絶対等級 M_V と周期 P（単位は日数）の関係として，

---

*33 K. Z. Stanek, D. Zaritsky, J. Harris, *Astrophys. J.*, **500**, L141 (1998) [astro-ph/9803181].

*34 A. A. Cole, *Astrophys. J.*, **500**, L137 (1998) [astro-ph/9804110]; L. Girardi *et al., op. cit.*.

*35 P. Popowski, A. Gould, *op. cit.*.

*36 E.F. Guinan *et al., op. cit.*.

*37 レビューは，M. Feast, *Odessa Astron. Publ.*, **14** [astro-ph/0110360].

*38 M. A. C. Perryman, *Astron. Astrophys.*, **323**, L49 (1997).

*39 M. W. Feast, R. M. Catchpole, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **286**, L1 (1997); F. Pont, in *Harmonizing Cosmic Distances in a Post-Hipparcos Era*, eds. D. Egret, A. Heck, ASP Conference Series (1998) [astro-ph/9812074]; H. Baumgardt, C. Dettbarn, B. Fuchs, J. Rockmann, R. Wielen, in *Harmonizing Cosmic Distance Scales in a Post-Hipparcos Era, ibid* [astro-ph/9812437].

$$M_V = -2.81 \log_{10} P - 1.43 \pm 0.10$$

が得られている．この値は以前の結果と比べて 0.2 等小さい．つまり，セファイド変光星の本来の光度が $10^{0.2\times2/5} = 1.20$ 倍大きく，これまでにセファイド変光星の周期–光度関係を直接，あるいは間接的に用いて得られたすべての距離を 10%増加させることにつながる．この値をセファイド変光星の絶対光度として用いると，LMC の距離指数は 18.66，もしくは LMC の金属量を考慮するとそれよりわずかに小さな値となる（ただし，ヒッパルコスによって較正されたセファイド変光星の絶対光度を使うと，セファイド変光星の周期–光度関係に対して LMC が唯一関わるのはそのグラフの傾きの決定だけである）．

セファイド変光星の絶対光度に関するこの結果は，さらなる矛盾を生むこととなった[*40]．

これらの不定性は，ハッブル宇宙望遠鏡の微細誘導センサーを用いた銀河系内のセファイド変光星の三角視差の測定により，最近になってようやく解決したようだ．まず，ケフェウス座デルタ星の三角視差[*41]は距離 273 ± 11 pc を与え，これは LMC の距離指数 18.50 ± 0.13 等に対応する．さらに最近，銀河系内の 9 つのセファイド変光星に対して三角視差が測られ，LMC の距離指数として 18.50 ± 0.03 等，あるいは金属量の補正を加味すると 18.40 ± 0.05 等が得られた[*42]．

NGC 4258（上記の，メーザーの固有運動の観測から距離が 7.2 ± 0.5 Mpc と得られている銀河）内のセファイド変光星の観測[*43]を通して，周期–光度関係の独立な較正も得られている．LMC の距離指標が 18.5 等であると仮定して得られた周期–光度関係式（1.3.7）を，NGC 4258 のセファイド変光星に適用して求めた距離 7.6 ± 0.3 Mpc は，メーザーから得られた距離と満足のいく一致をみている．しかし，NGC 4258 のセファイド変光星の金属量と LMC のものとには違いがあり，それがこの結論に対して論議を呼んでいる[*44]．NGC 4258（すでにみた

[*40] B. F. Madore, W. L. Freedman, *Astrophys. J.*, **492**, 110 (1998) を見よ．セファイド変光星の周期–光度関係に関する理論の最近のレビューは，A. Gautschy, in *Recent Results on* H_0–19th *Texas Symposium on Relativistic Astrophysics* [astro-ph/9901021].

[*41] G. F. Benedict *et al.*, *Astrophys. J.*, **124**, 1695 (2002).

[*42] G. F. Benedict *et al.*, *Astron. J.*, **133**, 1810 (2007) [astro-ph/0612465].

[*43] J. A. Newman *et al.*, *Astrophys. J.*, **553**, 562 (2001) [astro-ph-0012377].

[*44] たとえば，B. Paczynski, *Nature*, **401**, 331 (1999); F. Caputo, M. Marconi, I. Musella, *Astrophys. J.*, [astro-ph/0110526].

ように，この銀河の距離はメーザーのドップラーシフトと固有運動の観測からわかっている）にある 281 個のセファイド変光星の研究から得られた，2006 年の周期–光度関係の較正*45によれば，LMC の距離指数は 18.41 ± 0.10（統計誤差）± 0.13（系統誤差）等である．この研究は，銀河系のような金属量の多い領域と LMC のような金属量の少ない領域の両方を含んでいるので，セファイド変光星の周期–光度関係の金属量依存性の較正を与える．

2003 年の調査*46によれば，セファイド変光星**以外**の様々な距離指標（RR ライリ星，レッドクランプ星など）を用いて測定した LMC の距離指数は 18.48 ± 0.04 等であり，より早期にセファイド変光星の観測で得られていた結果にハッブル宇宙望遠鏡のチームが採用した修正を加えた値，18.52 ± 0.05 等と大変よく一致している．

2 次の距離指標

上記の距離指標はいずれも，特異速度が膨張速度に比べて無視できるような大きな赤方偏移，たとえば $z > 0.03$ の距離を測定できるほど明るくない．このような遠距離に対しては，**2 次の距離指標**と呼ばれるものが必要となる．これは，セファイド変光星より明るいもの，つまり銀河そのものか，もしくは超新星のように銀河と同じくらい明るいものでなくてはならない．

長年にわたり，セファイド変光星はたかだか 2–300 万パーセク（2–3 Mpc）までの距離指標としてしか使えず，適用範囲は局所銀河群（銀河系とアンドロメダ星雲 M 31，および M 33，LMC，SMC のような 1 ダースかそこらの小さな銀河からなる）と近傍の銀河群（M 81 銀河群，M 101 銀河群，ちょうこくしつ座銀河群）に限られていた．これでは適切な種類の銀河や超新星の距離を較正するのに十分でなく，球状星団，H II 領域（水素の電離領域），銀河で最も明るい星など，様々な中間的距離指標が必要となったのである．現在では，ハッブル宇宙望遠鏡のおかげでより遠方，約 30 Mpc の距離にわたってセファイド変光星を観測できるようになったため，2 次の距離指標は，中間的距離指標を用いることなしに直接較正できるようになった．これまでに開発されてきた 2 次距離指標のうち，主要なものは以下の 4 つである．

---

*45 L. M. Macri *et al.*, *Astrophys. J.*, **652**, 1133 (2006) [astro-ph/0608211].

*46 M. Feast, *Lect. Notes Phys.*, **635**, 45 (2003) [astro-ph/0301100].

1．タリー–フィッシャー関係

銀河は非常に遠くにあっても見えるが，同じ絶対光度を持つような銀河の種類は見つかっていない．しかし，1977 年，タリーとフィッシャー[*47]は，ある適当な種類の渦巻き銀河の絶対光度を評価する手法を編み出した．これらの銀河における（水素原子の 2 つの超微細構造間の遷移から生じる）21 cm 吸収線は，銀河回転から生じるドップラー効果によって広がっている．吸収線の幅 W は銀河回転の最大速度の情報を与え，それは銀河の質量と相関があり，さらにそれは銀河の絶対光度と相関がある[*48]（タリー–フィッシャー関係は，電波の周波数帯に現れる一酸化炭素分子の遷移のような他のスペクトル線の幅にも適用できる[*49]）．

このアプローチの一つの応用[*50]として，ある 21 cm 線の幅に対し，赤外線波長域の絶対光度（実際には，絶対光度 × ある共通の定数）を与えるような関数 $L_I(W)$ の**形状**が，24 個の銀河団にある 555 個の渦巻き銀河のサンプルより見いだされた．これらの銀河団の多くは，赤方偏移が 0.01 より小さいものであった（これらの銀河の相対距離は銀河の赤方偏移の比から式（1.2.9）を用いて得られたものであるが，銀河の持つ特異速度のため，個々の銀河のペアに関して求められた絶対光度の比は無視できない誤差を含んでいる．しかし，555 個の銀河サンプルから測定された絶対光度の相対値を，最小二乗法でなめらかな曲線に近似することにより，そのような誤差は相殺される）．おおまかに言って，$L_I(W)$ は W^3 に比例にすることが明らかとなった．関数 $L_I(W)$ の規格化は，セファイド変光星を含む距離のわかっている 15 個の渦巻き銀河の絶対光度を与えることで求められた（これら 15 個の銀河はたかだか 25 Mpc 程度の距離で，ハッブル定数の直接測定に使えるほど遠くない）．このように較正された関数 $L_I(W)$ を，赤方偏移が 0.013 から 0.03 の範囲にある 14 個の銀河団にある銀河の距離を求めるのに用い，その結果を式（1.2.9）と比べることで，ハッブル定数を求めることができた（これらの赤方偏移は特異速度を完全に無視できるほど十分に大きくないかもしれないが，非常に多くの銀河を用いることでこの問題を緩和できる）．このよ

[*47] R. B. Tully, J. R. Fisher, *Astron. Astrophys.*, **54**, 661 (1977).

[*48] M. Aaronson, J. R. Mould, J. Huchra, *Astrophys. J.*, **229**, 1 (1979).

[*49] Y. Tutui *et al.*, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **53**, 701 (2001) [astro-ph/0108462].

[*50] R. Giovanelli, in *The Extragalactic Distance Scale - Proceedings of the Space Telescope Science Institute Symposium held in Baltimore, MD, May*, 1996, Cambridge University Press (1997): 113; R. Giovanelli *et al.*, *Astron. J.*, **113**, 22 (1997).

うなやり方で求められたハッブル定数は 70 ± 5 km s^{-1}Mpc^{-1} であった．より最近になり,「ハッブル定数の測定」というハッブル宇宙望遠鏡の基幹プロジェクトが，セファイド変光星を用いてタリー–フィッシャー関係を（LMC の距離を 50 kpc と仮定して）再較正し，タリー–フィッシャー関係から得られた距離を，赤方偏移が 0.007 から 0.03 にある 19 個の銀河団サンプルの赤方偏移と較べて H_0 を求めた[*51]．これらの銀河団のサンプルはジョバネッリらの G97 サーベイから得られたものである[*52]．結果は $H_0 = 71 \pm 3 \pm 7$ km s^{-1} Mpc^{-1} で，一番目の不定性（±3）が統計的なもので，その二番目（±7）が系統的なものである．

2. フェイバー–ジャクソン関係

タリー–フィッシャー法は渦巻き銀河の軌道速度と絶対光度の相関に基づいているが，フェイバー–ジャクソン法は楕円銀河の乱雑速度と絶対光度の相関に基づいている[*53]．この手法がタリー–フィッシャー法よりも優れている点は，乱雑速度の二乗平均を直接銀河の質量に関係づける，ビリアル定理（1.9 節で議論する）という強固な理論基盤がある．

3. 基準平面

フェイバー–ジャクソン法は，軌道速度と絶対光度の相関が銀河の表面輝度，よって銀河の面積に依存すると認識されたことで改良された[*54]（「基準平面」という言葉は，楕円銀河に関するデータをグラフとして図示する仕方を指している）．この手法を用いることで[*55]，$H_0 = 78 \pm 5$（統計誤差）± 9（系統誤差）km s^{-1} Mpc^{-1} が得られた．

4. Ia 型超新星

Ia 型超新星は，連星系にいる白色矮星がもう片方の星からの物質の降着を受け，その質量が電子の縮退圧で支えられる最大質量——チャンドラセカール限界に近い値まで増加した際に生じると考えられている[*56]．このとき白色矮星は不安定となり，温度と密度の上昇によって炭素と酸素がニッケル 56（^{56}Ni）に転化され，

---

*51　S. Sakai *et al.*, *Astrophys. J.*, **529**, 698 (2000); W. L. Freedman *et al.*, *Astrophys. J.*, **553**, 47 (2001) およびそこで引用されている文献も見よ．

*52　Giovanelli *et al., op. cit.*.

*53　S. M. Faber, R. E. Jackson, *Astrophys. J.*, **204**, 668 (1976).

*54　A. Dressler *et al.*, *Astrophys. J.*, **313**, 42 (1987).

*55　D. D. Kelson *et al.*, *Astrophys. J.*, **529**, 768 (2000) [astro-ph/9909222]; J. P. Blakeslee, J. R. Lucey, J. L. Tonry, M. J. Hudson, V. K. Nararyan, B. J. Barris, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **330**, 443 (2002) [astro-ph/011183].

数十億 pc の距離でも見えるような熱核爆発を起こす．この爆発は，常にチャンドラセカール限界に近い質量で起こるのでその絶対光度にほとんど変化がなく，ほぼ理想的な距離指標となる*57．何らかの変化がある場合，それは超新星の光度の増加時間および減少時間とよく相関しているように見える．つまり，光度の減少（減光）が遅いと絶対光度が高い傾向があるからである*58．

この関係は，距離のわかっているいくつかの銀河中の Ia 型超新星の測定によって較正されている．1937 年から 1999 年の間に，セファイド変光星の観測で距離の測定できた銀河中に見つかった超新星は 10 個であった*59． これらのうち 6 個の Ia 型超新星は，ハッブル宇宙望遠鏡の基幹 H_0 プロジェクトのチーム*60によって絶対光度と減光時間の関係を較正するのに用いられた．そしてこの関係は，セロ・トロロ汎米天文台で観測された，赤方偏移が 0.01 から 0.1 の銀河における 29 個の Ia 型超新星への距離を計算するのに用いられた*61．これらの距離を赤方偏移を横軸にした図にすると，ハッブル定数*62 71 ± 2(統計誤差) ± 6 (系統誤差) $\mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$ を得ることができる．この値は，それ以前にハーバード大学のグループが Ia 型超新星を用いて決めた値*63 $H_0 = 67 \pm 7\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$ とよく一致している．

---

*56 （28 ページ）W. A. Fowler, F. Hoyle, *Astrophys. J.*, **132**, 565 (1960). I 型超新星は，そのスペクトルに水素の線が見られないものの呼称である．Ia 型超新星の他に，白色矮星よりももっと質量が大きく，水素の層が恒星風によって失われた星の核が重力崩壊して生じる I 型超新星もある．II 型超新星は，質量が大きく，水素の層を失わなかった星の核の重力崩壊によって生じる．チャンドラセカール限界に関しては G&C の 11.3 節を見よ．

*57 Ia 型超新星を距離指標として用いるというアイデアは，この種の超新星がかなり一様な光度を持っている，という C. T. Kowal, *Astron. J.*, **73**, 1021 (1968) の観測結果を受け，A. Sandage, G. A. Tammann, *Astrophys. J.*, **256**, 339 (1982) によって考案された．1982 年には，非常に明るい超巨星を中間的な距離指標として用い，セファイド変光星で測定できる小さい距離と Ia 型超新星を発見できる大きな距離の間の隙間を埋める必要があった．標準光源としての Ia 型超新星のレビューは，D. Branch, *Ann. Rev. Astron. & Astrophys.*, **36**, 17 (1998); P. Höflich, C. Gerardy, E. Linder, H. Marion, in *Stellar Candles*, eds. W. Gieren *et al.*, *Lecture Notes in Physics* [astro-ph/0301334].

*58 M. Phillips, *Astrophys. J.*, **413**, L105 (1993); M. Hamuy *et al.*, *Astron. J.*, **109**, 1 (1995); A. Reiss, W. Press, R. Kirshner, *Astrophys. J.*, **438**, L17 (1996); S. Jha, A. Riess, R. P. Kirshner, *Astrophys. J.*, **659**, 122 (2007). 絶対光度の色依存性および減少時間依存性は，R. Tripp, D. Branch, *Astrophys. J.* [astro-ph/9904347] によって考慮されている．

*59 リストは，Tripp, Branch, *op. cit.*.

*60 B. Gibson *et al.*, *Astrophys. J.*, **529**, 723 (2000) [astro-ph/9908149].

*61 M. Hamuy *et al.*, *Astron. J.*, **112**, 2398 (1996).

*62 L. Ferrarese *et al.*, in *Proceedings of the Cosmic Flows Workshop*, eds. S. Courteau *et al.*, ASP Conference Series [astro-ph/9909134]; W. L. Freedman *et al.*, *Astrophys. J.*, **553**, 47 (2001).

*63 A. G. Riess, W. H. Press, R. P. Kirshner, *Astrophys. J.*, **438**, L17 (1995).

このグループのメンバーは，その後新しい結果[*64]として $H_0 = 73 \pm 4$（統計誤差）± 5（系統誤差）km s^{-1} Mpc^{-1} を得た．一方でサンデイジ率いるグループは，Ia 型超新星とタリー–フィッシャー関係を用いて，常に小さい H_0 の値を得ていた[*65]．この隙間は埋められようとしている．2006 年には，サンデイジのグループ[*66]は $H_0 = 62.3 \pm 1.3$（統計誤差）± 5.0（系統誤差）km s^{-1} Mpc^{-1} を得た（サデイジらによれば，これらの結果の違いは，絶対光度と減光時間の関係を較正するのに使われた超新星が属する銀河の距離測定に用いられた，セファイド変光星の周期–光度関係の違いにあるらしい．サンデイジらは周期–光度関係が金属量に依存するとしている．しかしその後，マクリら[*45]は，NGC 4258 中の，金属量が豊富な領域とそうでない領域のセファイド変光星の周期–光度関係には違いが見られないと報告している）．

以前からの期待として，超新星爆発の理論的な理解が十分であれば，1 次の距離指標を使わなくても超新星までの距離を求められるのではないか，という望みがある．2003 年の，赤方偏移が 0.05 以下の 26 個の Ia 型超新星および赤方偏移 0.38 の 1 個の Ia 型超新星から観測された光度曲線（見かけの等級の時間変化）およびスペクトルと，理論計算との比較[*67]から，$H_0 = 67$ km s^{-1}Mpc^{-1} が得られている．ここで，標準偏差 2 つ分（2 シグマ）に相当する不定性は 8 km s^{-1}Mpc^{-1} である．この手法が 1 次の距離指標によって超新星の絶対光度を較正する古来からの手法に取って代わるにはまだまだ時期尚早であるが，これら二つの方法で求められた H_0 の値が一致するということは，古来からの手法が大きな間違いを犯していない，というある種の確認となる．

ハッブル定数を測定するのに使われた，5 番目の 2 次の距離指標を考えよう．

5. 表面輝度のゆらぎ

1998 年，トンリーとシュナイダー[*68]は，銀河の観測で得られた画像の部分部分における表面輝度のゆらぎを用いて，その銀河までの距離を測定する手法を考案した．ある銀河中の恒星が光度に応じたグループに分けられ，それぞれのグ

[*64] A. Riess *et al.*, *Astrophys. J.*, **627**, 579 (2005) [astro-ph/0503159].

[*65] 1996 年における状況のまとめは，G. A. Tammann, M. Federspeil, in *The Extragalactic Distance Scale*, eds. M. Livio, M. Donahue, N. Panagia, Cambridge University Press (1997): 137.

[*66] A. Sandage *et al.*, *Astrophys. J.*, **653**, 843 (2006) [astro-ph/0603647].

[*67] P. Höflich, C. Gerardy, E. Linder, H. Marion, *op. cit.*.

[*68] J. Tonry, D. P. Schneider, *Astron. J.*, **96**, 807 (1988).

ループ i に属するすべての星が同じ絶対光度 L_i を持つとしてみよう．望遠鏡の口径面積あたり，単位時間に銀河の画像のある小さな一部分（たとえば，CCD カメラのピクセルの一つ）が受け取るエネルギーの量は，

$$\ell = \sum_i \frac{N_i L_i}{4\pi d^2} \tag{1.3.8}$$

で与えられ，N_i はいま考えている銀河の画像の一部にあって，かつ光度グループ i に属する恒星の数，そして d はこの銀河までの距離である．たいていの場合，最も明るい恒星のみが分解可能で，N_i 個の星すべてを測定するのは不可能である．しかし，N_i が有限であることに起因する，画像の部分ごとの ℓ のゆらぎは測定できる．N_i が，画像の場所によらずにポアソン統計の法則にしたがってゆらぐとすれば，

$$\Big\langle (N_i - \langle N_i \rangle)(N_j - \langle N_j \rangle) \Big\rangle = \delta_{ij} \langle N_i \rangle \tag{1.3.9}$$

である．ここで，山括弧 (“$\langle\ \rangle$”) は銀河の画像中心の小さな部分ごとにわたる平均を表す．すると，

$$\frac{\langle (\ell - \langle \ell \rangle)^2 \rangle}{\langle \ell \rangle} = \frac{\bar{L}}{4\pi d^2} \tag{1.3.10}$$

を得，$\bar{L}$ は光度で重みをかけて平均を取った**星の**平均光度で，

$$\bar{L} \equiv \frac{\sum_i \langle N_i \rangle L_i^2}{\sum_i \langle N_i \rangle L_i} \tag{1.3.11}$$

で与えられる．この量は，銀河自身の光度に比べれば，異なる銀河に対して変化が少ない．ひとたび $\bar{L}$ が測られてこの関係式 (1.3.10) が較正されれば，距離を求めることができる．トンリーら[*69]は，セファイド変光星の観測から距離が分かっている銀河の表面輝度ゆらぎを研究することで，赤外線波長域の絶対光度 $\bar{L}$ と等価な絶対等級 $\bar{M}_I$ として，

$$\bar{M}_I = (-1.74 \pm 0.07) + (4.5 \pm 0.25)\,[m_V - m_I - 1.15] \tag{1.3.12}$$

を得た．ここで，$m_V - m_I$ は銀河の色を特徴づけるパラメータで，赤外線と可視光域における見かけの等級の差に等しい（$m_V - m_I$ は 1.0 から 1.5 の間にあると

[*69] J. L. Tonry, J. P. Blakeslee, E. A. Ajhar, A. Dressler, *Astrophys. J.*, **473**, 399 (1997). より最近のサーベイに関しては，J. L. Tonry *et al.*, *Astrophys. J.*, **546**, 681 (2001) [astro-ph/0011223].

仮定）．彼らは式（1.3.10）を用いてより大きな赤方偏移にある銀河の距離を求め，ハッブル定数 81 ± 6 km s^{-1} Mpc^{-1} を得た．

他にも，ハッブル定数を測定するのに使われる様々な現象がある．たとえば，他の型の超新星，新星，球状星団，および惑星状星雲の見かけの光度と絶対光度の比較，楕円銀河の直径–速度分散関係，重力レンズ（1.12 節で議論），スニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果（2.3 節で議論）等である[*70]．ハッブル宇宙望遠鏡の基幹 H_0 プロジェクトチームは，タリー–フィッシャー関係，Ia 型超新星，そして他のいくつかの 2 次の距離指標を用いて測定したハッブル定数の結果をまとめて[*71]，

$$H_0 = 71 \pm 6 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

と結論した．7.2 節で見るように，宇宙マイクロ波背景放射の異方性の研究から $H_0 = 73 \pm 3$ km s^{-1} Mpc^{-1} が得られている．これは，ここで議論した手法のどれにもよっていないが，平坦な空間，時間によらない真空のエネルギー，そして冷たい暗黒物質のような，いくつかの宇宙論的仮定に基づいている．この理由から，宇宙マイクロ波背景放射によって得られる精度の高い H_0 の測定は，ここで議論した古来からの測定に取って代わることはない．むしろ，これらの極めて異なる手法によって求められた H_0 の値の一致（あるいは将来的に見つかるかもしれない不一致）は，宇宙マイクロ波背景放射の解析に用いている宇宙論的な仮定を確認（あるいは棄却）するために有用となろう．

ハッブル定数の不定性を考慮するため，最近ではたいてい，

$$H_0 = 100\, h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \tag{1.3.13}$$

のように書いて，無次元のパラメータ h を 0.7 のあたりとする．これに対応するハッブル時間は，

$$1/H_0 = 9.778 \times 10^9\, h^{-1} \text{ 年} \tag{1.3.14}$$

である．

---

*70　参考文献も含めてこれらの手法のほとんどを網羅した調査は，G. H. Jacoby, D. Branch, R. Ciardullo, R. L. Davies, W. E. Harris, M. J. Pierce, C. J. Pritchet, J. L. Tonry, D. L. Welch, *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **104**, 599 (1992).

*71　L. Ferrarese *et al.*, *op. cit.*; W. L. Freedman *et al.*, *Astrophys. J.*, **553**, 47 (2001).

1.4 光度距離と角径距離

これより，大きな赤方偏移（$z > 0.1$）における距離の測定を考える．このように大きな赤方偏移では距離測定における宇宙膨張の効果を無視できない．これらの測定によって，我々は，宇宙膨張が加速しているのか減速しているのか，そしてどのくらい速く宇宙が膨張しているのかを知ることができる．これらの測定を解釈するため，まずここでは大きな赤方偏移でどう距離を定義するのかを考える．そして次の 1.5 節でアインシュタインの場の方程式をロバートソン–ウォーカー計量に適用し，その後 1.6 節において大きな赤方偏移での距離測定，およびその解釈に立ち戻る．

1.3 節で，距離 d で絶対光度 L を持つ光源の，見かけの光度 ℓ に関するよく知られた関係式 $\ell = L/4\pi d^2$ を導いた．大きな距離ではこの導出法は 3 つの理由から修正しなくてはいけない．

(1) 光が地球に届いた時刻を t_0 とし，その時刻に光源のまわりに張られ，かつ地球を通る球面を考える．この球面の固有面積は計量（1.1.10）によって $4\pi r_1^2 a^2(t_0)$ と与えられる．ここで，r_1 は光源から見た地球の座標距離であり，それはまた地球から見た光源の座標距離に等しい．したがって，面積 A の口径を持つ望遠鏡で受け取る光の量との比は $A/4\pi r_1^2 a^2(t_0)$ であり，上記の ℓ に関する公式の分母にある $1/d^2$ は $1/r_1^2 a^2(t_0)$ で置き換えられる．

(2) 個々の光子が地球に到達する頻度は，光子が放たれたときの頻度よりも赤方偏移 $a(t_1)/a(t_0) = 1/(1+z)$ の分だけ小さい．

(3) 地球で受け取る個々の光子のエネルギー $h\nu_0$ は，光子が放たれたときのエネルギー $h\nu_1$ よりも赤方偏移 $1/(1+z)$ の分だけ小さい．

これらを合わせることで，任意の大きさの赤方偏移 z に対応する動径座標 r_1 にある光源の，見かけの光度についての正しい公式を導くことができる．

$$\ell = \frac{L}{4\pi r_1^2 a^2(t_0)(1+z)^2}. \tag{1.4.1}$$

この，見かけの光度と絶対光度の関係式が式（1.3.3）と同じ形になるように「光度距離」d_L を定義すると，

$$\ell = \frac{L}{4\pi d_L^2}. \tag{1.4.2}$$

つまり，式（1.4.1）より

$$d_L = a(t_0) r_1 (1+z) \tag{1.4.3}$$

を得る．

$z \ll 1$ の天体に対しては，光度距離と赤方偏移の関係を冪展開して便利な形に書くことができる．赤方偏移 $1+z \equiv a(t_0)/a(t_1)$ は「回顧時間」(look-back time) $t_0 - t_1$ に関する冪展開として以下のように書ける．

$$z = H_0(t_0 - t_1) + \frac{1}{2}(q_0 + 2) H_0^2 (t_0 - t_1)^2 + \cdots , \tag{1.4.4}$$

ここで H_0 はハッブル定数（1.2.7）で，q_0 は**減速パラメータ**，

$$q_0 \equiv \frac{-1}{H_0^2\, a(t_0)} \left. \frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} \tag{1.4.5}$$

である．逆に，回顧時間を赤方偏移に関する冪展開としても書け，

$$H_0(t_0 - t_1) = z - \frac{1}{2}(q_0 + 2) z^2 + \cdots \tag{1.4.6}$$

となる．光源の座標距離 r_1 は式（1.2.2）で与えられる．

$$\frac{t_0 - t_1}{a(t_0)} + \frac{H_0 (t_0 - t_1)^2}{2a(t_0)} + \cdots = r_1 + \cdots , \tag{1.4.7}$$

ここで右辺の "$\cdots$" は，r_1 に関して **3 次**以上の項を指している．式（1.4.6）を用いれば，解は，

$$r_1\, a(t_0)\, H_0 = z - \frac{1}{2}(1 + q_0) z^2 + \cdots . \tag{1.4.8}$$

これより光度距離（1.4.3）が赤方偏移の冪展開として得られ，

$$d_L = H_0^{-1} \left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0) z^2 + \cdots \right] \tag{1.4.9}$$

となる．したがって，光度距離を赤方偏移の関数として z^2 の項まで測定することで，q_0 と H_0 を決めることができる．同様の動機から，冪展開（1.4.9）は z に関して 4 次の項まで拡張される[*1]．

$$d_L(z) = H_0^{-1} \left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0) z^2 - \frac{1}{6} \left(1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0 + \frac{K}{H_0^2 a_0^2} \right) z^3 \right.$$

[*1] M. Visser, *Class. Quant. Grav.*, **21**, 2603 (2004) [gr-qc/0309109]. これ以前に z に関して 3 次の項が T. Chiba, T. Nakamura, *Prog. Theor. Phys.*, **100**, 1077 (1998) によって計算されている．

$$+\frac{1}{24}\Big(2-2q_0-15q_0^2-15q_0^3+5j_0+10q_0j_0$$
$$+s_0+\frac{2K(1+3q_0)}{H_0^2a_0^2}\Big)z^4+\cdots\Big],$$

ここで j_0 と s_0 は，それぞれ**躍度**（あるいは加加速度）と**スナップ**として知られるパラメータである．

$$j_0 \equiv \frac{1}{H_0^3\,a(t_0)}\,\frac{d^3a(t)}{dt^3}\bigg|_{t=t_0},\qquad s_0 \equiv \frac{1}{H_0^4\,a(t_0)}\,\frac{d^4a(t)}{dt^4}\bigg|_{t=t_0}.$$

何年も前には，宇宙論は「二つの数の探求」と呼ばれていた．二つの数とは H_0 と q_0 である．前節で述べたように，H_0 の決定は今でも天文学の主要な目的の一つである．一方で q_0 に対する関心は薄れている．現在では，q_0 の正確な値を与えるような中赤方偏移（0.1–0.2 程度）の距離を高精度で決める代わりに，過去 20–30 億年に渡る $a(t)$ の関数形全体に依存するような高赤方偏移（1 程度）の距離をそれなりの精度で決めている．1 程度の赤方偏移になると，冪展開は役に立たない．これらの測定を解釈するには宇宙膨張の動力学理論が必要になり，これは次節で発展させる．そこでは現代の観測が，$a(t)$ を計算するには 2 つではなく少なくとも 3 つのパラメータを測定する必要があると強く示唆しているのを見る．

動力学理論に入る前に，少し立ち止まって，異なる距離のものさし間の違いを確認しておこう．まず固有距離（1.1.15）と光度距離（1.4.3）が登場した．この他にもう一つ別の種類の距離があり，それは見込み角の大きさを物理的大きさと比較することで測定するものである．計量（1.1.12）によれば，共動動径座標 r_1 にいて時刻 t_1 で光を放ち，見込み角 θ で観測される光源は，(視線方向に垂直に) 固有長さ s を持ち，それは $a(t_1)r_1\theta$ に等しい．**角径距離** d_A は，θ がユークリッド幾何学における通常の関係式で与えられるように定義され，

$$\theta = s/d_A, \tag{1.4.10}$$

これから，

$$d_A = a(t_1)r_1 \tag{1.4.11}$$

を得る．

この結果を式（1.4.3）と比べると，光度距離と角径距離の比が赤方偏移のみの単純な関数で書けることがわかる．

$$d_A/d_L = (1+z)^{-2}. \tag{1.4.12}$$

したがって，もしある赤方偏移で光度距離を測っていれば（そしてロバートソン–ウォーカーの正しさに納得していれば），同じ赤方偏移で角径距離を測っても $a(t)$ に関する新しい情報を得ることはできない．銀河も超新星もはっきりと決まった端を持っているわけではないので，角径距離は光度距離に比べて宇宙膨張を研究するのにそれほど有用ではない．しかし，これから見るように角径距離は，9 章で重力レンズ，および 2 章と 7 章で宇宙マイクロ波背景放射のゆらぎを解析する際に重要な役割を果たす．8.1 節では，物質密度のゆらぎにおける音響振動の観測が，さらにもう一つ別の距離，**構造距離**の測定を可能にするかもしれないことを見る．なお，構造距離は $a(t_0)r_1 = (1+z)d_A$ に等しい．

1.5 宇宙膨張の動力学

これまで見てきた結果はすべて一般的であり，宇宙膨張の動力学に関して何の仮定もしていない．これより先に進むには，宇宙のエネルギー密度と圧力に関して一時的にいくつか仮定をおき，アインシュタインの重力場の方程式を解く必要がある．

宇宙膨張はアインシュタインの場の方程式（B.71）に従い，それは以下のように便利な形に書くことができる．

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}, \tag{1.5.1}$$

ここで $R_{\mu\nu}$ は**リッチテンソル**，

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} \tag{1.5.2}$$

そして $S_{\mu\nu}$ はエネルギー–運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ で与えられる．

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda. \tag{1.5.3}$$

1.1 節で見たように，ロバートソン–ウォーカー計量に対しては，時間に関する添字を 2 つもしくは 3 つ含むアフィン接続の成分はすべてゼロであるから，

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^k_{ki}}{\partial x^j} - \left[\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^0_{ij}}{\partial t}\right] + \left[\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{j0} + \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl}\right]$$

$$-\left[\Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl}+\Gamma^0_{ij}\Gamma^l_{0l}\right], \tag{1.5.4}$$

$$R_{00}=\frac{\partial\Gamma^i_{i0}}{\partial t}+\Gamma^i_{0j}\Gamma^j_{0i}. \tag{1.5.5}$$

$R_{i0}=R_{0i}$ は 3 元ベクトルであるから，ロバートソン–ウォーカー計量の等方性より必ずゼロである．ゼロでないアフィン接続の成分に関して公式（1.1.17)–(1.1.19）を用いると，

$$\frac{\partial\Gamma^0_{ij}}{\partial t}=\tilde{g}_{ij}\frac{d}{dt}(a\dot{a}),\quad \Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{j0}=\tilde{g}_{ij}\dot{a}^2,\quad \Gamma^0_{ij}\Gamma^l_{0l}=3\tilde{g}_{ij}\dot{a}^2,$$
$$\frac{\partial\Gamma^i_{i0}}{\partial t}=3\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right),\qquad \Gamma^i_{0j}\Gamma^j_{i0}=3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \tag{1.5.6}$$

を得る．ここで，点（$\dot{}$）は時間微分を表す．これを式（1.5.4）と（1.5.5）に代入すれば，ゼロでないリッチテンソルの成分，

$$R_{ij}=\tilde{R}_{ij}-2\dot{a}^2\tilde{g}_{ij}-a\ddot{a}\tilde{g}_{ij}, \tag{1.5.7}$$

$$R_{00}=3\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)+3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=3\frac{\ddot{a}}{a} \tag{1.5.8}$$

を得る．ここで，$\tilde{R}_{ij}$ は純粋に空間的なリッチテンソルである．

$$\tilde{R}_{ij}=\frac{\partial\Gamma^k_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^k}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl}-\Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{kl}. \tag{1.5.9}$$

式（1.1.19）によれば，4 次元のアフィン接続の空間的な成分 Γ^i_{jk} は，3 次元計量 $\tilde{g}_{ij}$ から計算された 3 次元のアフィン接続と等しい．

$$\Gamma^k_{ij}=Kx^k\tilde{g}_{ij}. \tag{1.5.10}$$

$\tilde{R}_{ij}$ を計算するため，以前粒子の軌跡を計算した際に用いたわざを使おう．$\tilde{R}_{ij}$ を，計算が最も簡単となる $\boldsymbol{x}=0$ で計算し，結果を空間座標のすべての変換に対して不変な形式で表す．そうすれば，3 次元計量の一様性により，この結果がすべての場所において正しいことが示される．$\boldsymbol{x}=0$ における空間的リッチテンソルは，

$$\tilde{R}_{ij}=\frac{\partial\Gamma^l_{li}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma^l_{ji}}{\partial x^l}=K\delta_{ij}-3K\delta_{ij}=-2K\delta_{ij}. \tag{1.5.11}$$

$\boldsymbol{x}=0$ では，空間的計量 $\tilde{g}_{ij}$ は単に δ_{ij} であるから，空間的リッチテンソルは，

$$\tilde{R}_{ij}=-2K\tilde{g}_{ij} \tag{1.5.12}$$

のように書き換えられる．この結果は 2 つの 3 元テンソル間の等式であるから，原点 $\boldsymbol{x}=0$ が他の点に移動されるような変換を含むすべての空間座標系で成り立つ．よって式（1.5.12）はすべての場所で成り立ち，式（1.5.7）と合わせれば，

$$R_{ij} = -\left[2K + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right]\tilde{g}_{ij} \tag{1.5.13}$$

を得る．

S_{ij} と S_{00} の値も必要である．式（1.1.31）を以下の形に書く．

$$T_{00} = \rho, \qquad T_{i0} = 0, \qquad T_{ij} = a^2 p\,\tilde{g}_{ij}, \tag{1.5.14}$$

ここで $\rho(t)$ と $p(t)$ は固有エネルギー密度と圧力である．これを用いれば，式（1.5.3）より，

$$\begin{aligned} S_{ij} &= T_{ij} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ij}a^2\left(T^k{}_k + T^0{}_0\right) \qquad (1.5.15)\\ &= a^2p\tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2}a^2\tilde{g}_{ij}(3p-\rho) = \frac{1}{2}(\rho - p)\,a^2\,\tilde{g}_{ij}, \\ S_{00} &= T_{00} + \frac{1}{2}\left(T^k{}_k + T^0{}_0\right) = \rho + \frac{1}{2}(3p-\rho) = \frac{1}{2}(\rho+3p), \qquad (1.5.16)\end{aligned}$$

そして $S_{i0}=0$ を得る．以上より，アインシュタイン方程式から以下の結果が導かれる．

$$-\frac{2K}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho - p), \tag{1.5.17}$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G(3p+\rho). \tag{1.5.18}$$

1 番目の方程式を 3 倍し，それを 2 番目の方程式に加えて 2 階微分を含む項を消去することで，以下の式を得る．

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8\pi G\,\rho\,a^2}{3}. \tag{1.5.19}$$

これが，宇宙膨張の振る舞いを決める基礎となるフリードマン方程式[*1]である．

式（1.5.17）と（1.5.18）にある残りの情報からは保存則（1.1.32）が導ける．

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p). \tag{1.5.20}$$

(これは特に驚くことではない．あらゆる状況下において，エネルギー–運動量の保存則はアインシュタイン方程式から導くことができる．) p を ρ の関数として与

[*1] A. Friedmann, *Z. Phys.*, **16**, 377 (1922); *ibid* **21**, 326 (1924).

えれば，式（1.5.20）を解くことで ρ を a の関数として解き，さらにその解を式（1.5.19）に用いることで a を t の関数として解ける．

式（1.5.19）を導く際に，少なくとも物質が非相対論的な場合には成り立つ別の導出方法がある．共動的な球を考え，それを膨張宇宙から切り離してみよう．ある典型的な銀河を中心に置き，この球は中心のみに物質があるとする．バーコフの定理*2によると，ある任意の点のまわりで球対称な系では，この点を中心とする空っぽの球の計量は平坦な空間の計量と等しくなければならない．系が球対称であれば，球の外側がどうであろうとこの定理は成り立つ．さて，この球の中に物質を入れ，$\boldsymbol{X}=0$ に置かれた対称中心からの距離に比例するように速度を与える．

$$\dot{\boldsymbol{X}} = H(t)\boldsymbol{X}. \tag{1.5.21}$$

（ここで，$\boldsymbol{X}$ の成分 X^i は通常のデカルト座標で，ロバートソン–ウォーカー計量に使われている共動座標ではない．ここで与えた速度場が一様性の原理を満たすことに注意しよう．$\boldsymbol{X}_1$ にある共動的粒子が $\boldsymbol{X}_2$ にある共動的粒子に対して持つ相対速度は，$\dot{\boldsymbol{X}}_1 - \dot{\boldsymbol{X}}_2 = H(t)(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)$ となる.）式（1.5.21）の解は，

$$\boldsymbol{X}(t) = \left(\frac{a(t)}{a(t_0)}\right)\boldsymbol{X}(t_0) \tag{1.5.22}$$

で，$a(t)$ は方程式，

$$\dot{a}(t)/a(t) = H(t) \tag{1.5.23}$$

の解である．この球の半径をあまり大きくならないようにとれば，球に入れた物質の膨張速度（1.5.21）は非相対論的であり，重力場は弱い．したがって物質の運動をニュートン力学を用いて追うことができる．位置 $\boldsymbol{X}$ において質量 m を持つ共動的な粒子の運動エネルギーは，

$$\text{運動エネルギー} = \frac{1}{2}m\,\dot{\boldsymbol{X}}^2 = \frac{m\dot{a}^2\boldsymbol{X}^2}{2\,a^2} \tag{1.5.24}$$

である．この粒子の位置より内部にある球の質量は $M(\boldsymbol{X}) = 4\pi\rho|\boldsymbol{X}|^3/3$ であるから，粒子のポテンシャルエネルギーは，

$$\text{ポテンシャルエネルギー} = -\frac{G\,m\,M(\boldsymbol{X})}{|\boldsymbol{X}|} = -\frac{4\pi G\,m\,\rho\,|\boldsymbol{X}|^2}{3} \tag{1.5.25}$$

---

*2 G&C, 11.7 節.

となる．エネルギー保存則より，

$$
\begin{aligned}
E &= \text{運動エネルギー} + \text{ポテンシャルエネルギー} \\
&= \frac{m\,|\boldsymbol{X}(t_0)|^2}{a^2(t_0)}\left[\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{4\pi G\,\rho\,a^2}{3}\right] = \text{一定}
\end{aligned}
\tag{1.5.26}
$$

である．したがって，粒子のエネルギー E を，

$$
E = -\,\frac{K\,m\,|\boldsymbol{X}(t_0)|^2}{2\,a^2(t_0)}
\tag{1.5.27}
$$

と同定すれば，式（1.5.19）と同じ結果を得る．$E \geqq 0$ である場合に限り，すなわち $K=0$ か $K=-1$ の場合に限り，粒子は無限遠方まで脱出できる．$K=+1$ の場合には粒子速度は脱出速度よりも小さいため，膨張はいずれ止まり，粒子は互いの方向に向かって落下する．

相対論的な公式に戻ろう．もし ρ が a にどう依存するかわからなくても，式（1.5.19）から宇宙膨張の一般的性質について重要な知見が得られる．まず，ρ が正の値を取る限り，宇宙膨張が止まる唯一の可能性は $K=+1$，つまり，空間幾何学が正の曲率を持つ球の場合に限られる．また，ハッブル定数 $H_0 \equiv \dot{a}(t_0)/a(t_0)$ がどのような値であっても，現在の宇宙の臨界密度，

$$
\rho_{0,\mathrm{crit}} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.878 \times 10^{-29}\,h^2\ \mathrm{g/cm^3},
\tag{1.5.28}
$$

を定義できる．ここで，h は $100\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$ を単位とするハッブル定数である．式（1.5.19）によれば，宇宙の組成に関して何を仮定しようとも，曲率定数 K は現在の密度 ρ_0 が $\rho_{0,\mathrm{crit}}$ より大きいか，等しいか，あるいは小さいかによって $+1$ か，0 か，あるいは -1 かの値を取る．**もし** $3p+\rho$ が正（これは，真空のエネルギー密度がなければ物質と放射のいかなる組み合わせに対しても成り立つ）であれば，式（1.5.18）から $\ddot{a}/a \leqq 0$ であり，したがって宇宙膨張は過去のある時点で $a=0$ となる点から始まったことになり，また現在の宇宙の年齢 t_0 はハッブル時間より**大きくなることはない**．

$$
t_0 \leqq H_0^{-1}.
\tag{1.5.29}
$$

もし $K=+1$ で宇宙膨張が止まると，$\ddot{a}/a \leqq 0$ である限り宇宙は特異点 $a=0$ に向かって収縮する．

式（1.5.18）を使えば，減速パラメータ $q_0 \equiv -\ddot{a}(t_0)a(t_0)/\dot{a}^2(t_0)$ に関する一般

公式を得られる.

$$q_0 = \frac{4\pi G(\rho_0 + 3p_0)}{3H_0^2} = \frac{\rho_0 + 3p_0}{2\rho_{0,\mathrm{crit}}}. \tag{1.5.30}$$

下つきの添字 0 は現在の値を指す．もし現在の宇宙の密度が非相対論的物質で支配されているなら $p_0 \ll \rho_0$ であり，$q_0 > \frac{1}{2}$，$q_0 = \frac{1}{2}$，あるいは $q_0 < \frac{1}{2}$ に応じて曲率定数 K は $+1$，0，あるいは -1 の値を取る．一方で，もし現在の宇宙の密度が相対論的物質で支配されているなら $p_0 = \rho_0/3$ であり，$K = 0$ での減速パラメータの値は $q_0 = 1$ である．最後に，もし現在の宇宙の密度が真空のエネルギーで支配されているなら $p_0 = -\rho_0$ であり，$K = 0$ での減速パラメータの値は $q_0 = -1$ である.

これらの結果には特異な側面がある．非相対論的あるいは相対論的な物質の，式（1.5.19）の右辺における ρa^2 への寄与は，$a \to 0$ になるにつれてそれぞれ a^{-1} と a^{-2} のように増加する．したがって，宇宙膨張において十分に早期の段階では曲率定数 K を無視してよく，式（1.5.19）は，

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \to \frac{8\pi G\rho}{3}. \tag{1.5.31}$$

つまり，宇宙早期の密度は基本的に臨界密度 $3H^2/8\pi G$ に等しい．ここで $H \equiv \dot{a}/a$ はそれらの時期におけるハッブル「定数」の値である．一方，後に見るように，現在の宇宙の全エネルギー密度は未だ臨界密度に近い．何十億年も経っているというのに，ρ が未だに ρ_{crit} からほとんどずれていないというのはどういうことだろう？　これはしばしば**平坦性問題**と呼ばれている.

平坦性問題の最も単純な解は，単に我々が空間的に平坦な宇宙に住んでいるというものである．そこでは $K = 0$ であり，ρ は常に ρ_{crit} と等しい．より支持される解は 4 章で議論するインフレーション理論によって与えられる．これらの理論では K がゼロである必要はなく，ρ が ρ_{crit} に近い値で始まる必要もないが，宇宙は早期において $\rho/\rho_{\mathrm{crit}}$ が急速に 1 に近づくような急激な進化をする．インフレーション理論では，現在の ρ が ρ_{crit} に非常に近いと期待される（ただし要求はされない）ため，この場合 $K = 0$ と取るのは良い近似である.

$K = 0$ の場合，1.1 節で並べた 3 つの特別な場合において式（1.5.19）の解は非常に単純になる.

非相対論的な物質：$\rho = \rho_0 (a/a_0)^{-3}$ で，$K = 0$ のときの式（1.5.19）の解は，

$$a(t) \propto t^{2/3}. \tag{1.5.32}$$

これより $q_0 \equiv -a\ddot{a}/\dot{a}^2 = 1/2$，および次の宇宙年齢とハッブル定数との間の単純な関係式，

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = 6.52 \times 10^9 \, h^{-1} \text{ 年} \tag{1.5.33}$$

を得る．式（1.5.32）と（1.5.18）により，$K = 0$ のとき，ある時刻 t におけるエネルギー密度は $\rho = 1/6\pi G t^2$ で与えられる．これは**アインシュタイン–ド・ジッターモデル**として知られている．このモデルは何年にも渡って最も支持されていたが，これから見るように，宇宙年齢（1.5.33）はある種の恒星の年齢に比べて小さすぎる．

相対論的な物質：$\rho = \rho_0 (a/a_0)^{-4}$ で，$K = 0$ のときの式（1.5.19）の解は，

$$a(t) \propto \sqrt{t}. \tag{1.5.34}$$

これより $q_0 = +1$ を得る．宇宙年齢とハッブル定数の間の関係式は，

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \tag{1.5.35}$$

となる．ある時刻 t におけるエネルギー密度は $\rho = 3/32\pi G t^2$ である．

真空のエネルギー：ローレンツ変換に対する不変性より，局所慣性系では真空のエネルギー–運動量テンソル $T_V^{\mu\nu}$ はミンコフスキー時空の計量 $\eta^{\mu\nu}$ に比例しなければならない（ここで，$\eta^{ij} = \eta_{ij} = \delta_{ij}$, $\eta^{i0} = \eta_{i0} = \eta^{0i} = \eta_{0i} = 0$, $\eta^{00} = \eta_{00} = -1$ である）．したがって，一般の座標系では $T_V^{\mu\nu}$ は $g^{\mu\nu}$ に比例しなければならない．この結果を式（B.43）と比べると真空の圧力は $p_V = -\rho_V$ で与えられることがわかり，そのときのエネルギー–運動量テンソルは $T_V^{\mu\nu} = -\rho_V \, g^{\mu\nu}$ である．他の形式をとるエネルギー成分がなければ，これは保存則 $0 = T_V^{\mu\nu}{}_{;\mu} = g^{\mu\nu} \partial \rho_V / \partial x^\mu$ を満たし，これより ρ_V が時空によらない定数であると導かれる．式（1.5.19）で $K = 0$ とすると $\rho_V > 0$ が要請され，解は，

$$a(t) \propto \exp(Ht) \tag{1.5.36}$$

である．ここで H はハッブル定数（今度は本当に定数である）で，

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_V}{3}} \tag{1.5.37}$$

となる．このとき $q_0 = -1$ で，宇宙年齢は無限大である．このモデルは**ド・ジッターモデル**として知られる[*3]．もちろん，宇宙には**いくらか**物質があるから，たとえ現在における宇宙の密度が定数である真空のエネルギーで支配されていたとしても，過去では物質あるいは放射が重要であり，宇宙年齢は有限である．真空のエネルギーがない場合と比べ，このモデルの宇宙年齢は大きい．

より一般的に，任意の K を持ち，真空のエネルギーと相対論的および非相対論的物質がそれぞれ臨界密度の比として Ω_Λ，Ω_M，Ω_R を持つような場合[*4]，

$$\rho = \frac{3\,H_0^2}{8\pi G}\left[\Omega_\Lambda + \Omega_M\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_R\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right], \tag{1.5.38}$$

つまり，現在時刻における真空，非相対論的物質，および相対論的物質（つまり放射）のエネルギー密度はそれぞれ，

$$\rho_{V0} \equiv \frac{3H_0^2\Omega_\Lambda}{8\pi G}, \quad \rho_{M0} \equiv \frac{3H_0^2\Omega_M}{8\pi G}, \quad \rho_{R0} \equiv \frac{3H_0^2\Omega_R}{8\pi G} \tag{1.5.39}$$

で与えられ，現在の時刻において式（1.5.19）は次のような形に書ける．

$$\Omega_\Lambda + \Omega_M + \Omega_R + \Omega_K = 1, \qquad \Omega_K \equiv -\frac{K}{a_0^2 H_0^2}. \tag{1.5.40}$$

これを式（1.5.19）に用いれば，

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dx}{H_0 x\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}} \\ &= \frac{-dz}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^4}} \end{aligned} \tag{1.5.41}$$

を得る．ここで $x \equiv a/a_0 = 1/(1+z)$ である．したがって，もし時刻ゼロを赤方偏移無限大とするならば，赤方偏移 z を持つ光が放たれた時刻は次の式で与えられる．

$$t(z) = \frac{1}{H_0}\int_0^{1/(1+z)} \frac{dx}{x\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}}. \tag{1.5.42}$$

[*3] W. de Sitter, *Proc. Roy. Acad. Sci.*, **19**, 1217 (1917); *ibid.* **20**, 229 (1917); *ibid.* **20**, 1309 (1917); *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **78**, 2 (1917).

[*4] 以下の歴史ノートで述べる宇宙定数とのつながりのため，真空のエネルギー密度と臨界密度の比の記号として Ω_V ではなく Ω_Λ を用いるのが標準となっている．

特に，この式で $z=0$ とすれば現在の宇宙年齢を計算できる．

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}}. \tag{1.5.43}$$

光度距離，あるいは角径距離を計算するためには，赤方偏移 z で観測される光源の動径座標 $r(z)$ を知らねばならない．式（1.2.2）と（1.5.41）より，これは，

$$\begin{aligned} r(z) &= S\left[\int_{t(z)}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}\right] \\ &= S\left[\frac{1}{a_0 H_0}\int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}}\right] \end{aligned}$$

で与えられ，S は，

$$S[y] \equiv \begin{cases} \sin y & K=+1 \\ y & K=0 \\ \sinh y & K=-1 \end{cases}$$

のいずれかである．この表式は，式（1.5.40）を用いて $a_0 H_0$ を Ω_K に関して書き換えることでより便利な表式になり，

$$\begin{aligned} a_0 r(z) &= \frac{1}{H_0 \Omega_K^{1/2}} \\ &\quad \times \sinh\left[\Omega_K^{1/2}\int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}}\right]. \end{aligned} \tag{1.5.44}$$

これはすべての曲率で使える（式（1.5.44）は $\Omega_K \to 0$ において滑らかな極限を持ち，それは曲率ゼロでの結果を与える．また，$\Omega_K < 0$ の場合には双曲線正弦関数 sinh の引数が虚数なので，$\sinh ix = i\sin x$ を用いる）．式（1.5.44）を式（1.4.3）に代入することで，赤方偏移 z で観測される光源の光度距離が得られる．

$$\begin{aligned} d_L(z) &= a_0 r(z)(1+z) \\ &= \frac{1+z}{H_0 \Omega_K^{1/2}} \times \sinh\left[\Omega_K^{1/2}\int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}}\right]. \end{aligned} \tag{1.5.45}$$

$K=0$ では $\Omega_K = 0$ であるから，式（1.5.45）は，

$$d_L(z) = a_0 r_1 (1+z) = \frac{1+z}{H_0} \int_{1/(1+z)}^{1} \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}} \tag{1.5.46}$$

となる.

2.1 節で見るように，Ω_R は Ω_M よりも非常に小さく，積分（1.5.46）は，Ω_R がゼロであろうとなかろうと積分の下限が $z \to \infty$ で収束するため，ここでは良い近似で $\Omega_R = 0$ と取れる.

減速パラメータ q_0 を Ω で表しておこう．圧力とエネルギー密度の比 p/ρ を表す w は，真空，物質，放射に対してそれぞれ -1，0，$1/3$ を取る．したがって式（1.5.39）より現在の圧力が計算できて，

$$p_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left(-\Omega_\Lambda + \frac{1}{3}\Omega_R \right) \tag{1.5.47}$$

である．そして式（1.5.30）より，

$$q_0 = \frac{4\pi G(3p_0 + \rho_0)}{3H_0^2} = \frac{1}{2} \left(\Omega_M - 2\Omega_\Lambda + 2\Omega_R \right) \tag{1.5.48}$$

となる.

我々が Ω_K や Ω_M などの値に興味を持つ理由の一つは，それらを知ることで現在の宇宙膨張がいずれ止まるのかどうかがわかるからだ．式（1.5.38）によれば，膨張が止まるには以下の 3 次方程式に実数解がなければならない.

$$\Omega_\Lambda u^3 + \Omega_K u + \Omega_M = 0, \tag{1.5.49}$$

ここで $u \equiv a(t)/a(t_0)$ は 1 より大きい（放射を無視しているが，宇宙が膨張するにつれてそれはますます重要でなくなるから問題ない）．この表式の $u = 1$ における値は $+1$ である．もし $\Omega_\Lambda < 0$ なら式（1.5.49）の左辺は十分大きい u に対して負となるから，どこか中間の u で左辺がゼロになるはずであり，この時膨張は止まる．たとえ $\Omega_\Lambda \geqq 0$ であっても，$\Omega_K = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_M$ が十分に負であれば（そしてそれは何よりも $K = +1$ を要請する）膨張を止めることができる.

歴史ノート 1：全エネルギー–運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を真空の項 $-\rho_V g_{\mu\nu}$ と物質（放射を含む）から生じる項 $T^M_{\mu\nu}$ の和で書けば，アインシュタイン方程式は以下の形を取る.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\lambda{}_\lambda = -8\pi G T^M_{\mu\nu} + 8\pi G \rho_V g_{\mu\nu}. \tag{1.5.50}$$

したがって，真空のエネルギーの効果はアインシュタインの場の方程式を以下のように変形することと等価である．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T^{M}_{\mu\nu}, \tag{1.5.51}$$

ここで，

$$\Lambda = 8\pi G \rho_V \tag{1.5.52}$$

であり，この Λ は**宇宙定数**として知られている．この項は，当時本質的だとみなされていた条件，すなわち宇宙が静的であるべしという条件，を満たすためアインシュタインによって 1917 年に場の方程式に導入された[*5]．式（1.5.18）と（1.5.19）からわかるように，静的な宇宙の解は $3p + \rho = 0$ かつ $K = 8\pi G\rho a^2/3$ のときにのみ存在する．もし宇宙の中身が真空のエネルギーと非相対論的物質に限られていれば，$\rho = \rho_M + \rho_V$，$p = -\rho_V$，そして $\rho_M \geqq 0$ である．これらの条件から $\rho_M = 2\rho_V \geqq 0$，ひいては $K > 0$ が得られる．これはすなわち $K = +1$ を意味するので，a は決められた値 $a_{\mathrm{E}} = 1/\sqrt{8\pi G\rho_V} = 1/\sqrt{\Lambda}$ をとる．このモデルは**アインシュタインモデル**として知られている．

アインシュタイン自身は気づかなかったのだが，彼の宇宙論モデルは不安定であった．もし a が a_{E} よりほんの少し小さければ，ρ_M は $2\rho_V$ よりほんの少し大きく，したがって式（1.5.18）より $\ddot{a}/a < 0$，すなわち a は減少し始める．同様に，もし a が a_{E} よりも少し大きければ，a は増加し始める．$K = +1$ と $\Lambda > 0$ を持ち，a がアインシュタインの半径 $a = a_{\mathrm{E}}$ で物質密度が $\rho_M = 2\rho_V$ の状態から始まって無限に膨張する（もしくは a が $a = 0$ から始まって $t \to \infty$ で a_{E} に近づき，そこで $\rho_M = 2\rho_V$ となるようにちょうど必要な物質量を持つ）モデルは**エディントン–ルメートルモデル**として知られる[*6,*7]．

奇妙に思われるかもしれないが，ド・ジッターもまた，当時必要と思われていた静的な宇宙を満たすために彼の宇宙モデル（彼のモデルは $a \propto \exp(Ht)$ を持つ）を発明した．彼が提案した時間に依存しない計量は，

---

*5 A. Einstein, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, 142 (1917). 英語訳は，*The Principle of Relativity*, (1923); Dover Publications から 1952 年に再販, p.35.

*6 A. S. Eddington, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **90**, 668 (1930); G. Lemaître, *Ann. Soc. Sci. Brux.*, **A47**, 49 (1927); *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **91**, 483 (1931). 宇宙定数を真空のエネルギーの観点から見た解釈は，Lemaître in *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **20**, 12L (1934) で述べられている．

*7 G. Lemaître, *op. cit.*.

$$d\tau^2 = (1 - r^2/R^2)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2\, d\theta^2 - r^2\, \sin^2\theta\, d\phi^2 \tag{1.5.53}$$

あるいは $r = R\sin\chi$ を用いて書き直せば，

$$d\tau^2 = \cos^2\chi\, dt^2 - R^2\Big(d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi\, \sin^2\theta\, d\phi^2\Big), \tag{1.5.54}$$

ここで $R = \sqrt{3/\Lambda}$ は定数である．ド・ジッターは初め，この計量が $\Gamma^i_{00} \neq 0$ を与え，したがって彼の座標系が共動的でないことに気づいていなかった[*8]．後になってようやく，共動的な空間座標と宇宙論における標準の時間を用いることで，ド・ジッターのモデルが $K = 0$ と $a \propto \exp(t/R)$ を持つロバートソン–ウォーカーの計量と等価であることが示された．

宇宙膨張の発見以降，宇宙論学者は静的宇宙への興味を失った．アインシュタインは宇宙定数を導入したことを後悔し，これを彼の最大の誤りと呼んだ．しかし，次節で見るように，理論的には真空のエネルギーがゼロでないと考える理由があり，さらにそれが確かにゼロでないという観測的証拠まである．アインシュタインの誤りは，宇宙定数を導入したことではない．彼がそれを誤りだと考えたことが誤りだったのである．

歴史ノート 2：**定常宇宙論**として知られる，ボンディとゴールド[*9]，あるいは少し異なったバージョンでホイル[*10]，による宇宙モデルがある．このモデルでは物理的なものは何一つとして時間変化せず，ハッブル定数は真の定数であり，ド・ジッターモデルのように $a(t) \propto \exp(Ht)$ を持つ．曲率を一定に保つには $K = 0$ が必要であり，ρ が宇宙膨張に対して一定であるには新しい物質が絶えず生成されねばならない．宇宙マイクロ波背景放射（2 章で議論する）の発見以降，定常宇宙論でその本来の形式のものは，ほぼ完全に放棄されている．

1.6 大きな赤方偏移における距離：加速膨張

距離と赤方偏移の関係の説明に戻り，光源の特異速度が無視できるくらいの大きな赤方偏移 $z > 0.1$ を考えよう．このような高赤方偏移では，宇宙膨張が距離

[*8] A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, 2nd ed., Cambridge University Press (1924) Section 70. おもしろいことにエディントンは，ほとんどの渦巻き星雲が青方偏移でなく赤方偏移を示すというスライファーの観測を，フリードマンのモデルではなくド・ジッターのモデルで解釈している．

[*9] H. Bondi, T. Gold, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **108**, 252 (1948).

[*10] F. Hoyle, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **108**, 372 (1948), *ibid.*, **109**, 365 (1949).

の決定に与える影響を考慮する必要がある．

長年に渡って高赤方偏移で使われてきた主な「標準光源」は，大きな銀河団の中の最も明るい銀河であった．現在では，これらの銀河の絶対光度は宇宙論的な時間スケールで大きく変化することがわかっている．また，この観測手法には重大な選択バイアスがある．つまり，観測的に，より大きな絶対光度を持つ最大光度銀河が存在するような，より大きな銀河団を選ぶ傾向がある．最大光度銀河の進化はそれ自身興味深く，現在でも天文学の研究対象である*[1]が，これらの銀河が距離指標として用いられることはほぼないと言って良い．同様に，1.3 節で議論したタリー–フィッシャー関係も 1 程度の赤方偏移を持つ銀河に使われてきたが，これらの赤方偏移では宇宙論パラメータを決めるというよりは銀河の進化を研究するために使われている*[2]．

うまいことに，1.3 節で議論した Ia 型超新星が代わって素晴らしい標準光源を与える*[3]．これらの超新星は非常に明るい．たとえば青色バンドにおける絶対光度の最大値は平均約 −19.2 等であり，銀河系の絶対光度 −20.3 等と肩を並べるほどである．また，1.3 節で述べたように，Ia 型超新星は典型的に，連星系のうち片方が白色矮星で，それがもう一方の星からチャンドラセカール限界を超えるのにちょうど必要な質量を降着した際に生じるため，その爆発の性質は宇宙の歴史の中での爆発の時期，白色矮星のもとの質量，あるいは伴星の性質などにあまりよらない．しかし，もしかすると白色矮星の金属量（ヘリウムよりも重い元素の存在比率）には少し依存するかもしれず，そうなると爆発の時期に依存する可能性もある．Ia 型超新星の絶対光度は周りをとりまく環境によって変化するが，幸運なことにその変化の大部分は，超新星を距離指標として用いる際に経験的に修正できる．

ほぼ同時期に，二つのグループ，超新星宇宙論プロジェクト（Supernova

---

*[1] たとえば，D. Zaritsky *et al.*, in *Proceedings of the Sesto* 2001 *Conference on Tracing Cosmic Evolution with Galaxy Clusters* [astro-ph/0108152]; S. Brough *et al.*, in *Proceedings of the Sesto* 2001 *Conference on Tracing Cosmic Evolution with Galaxy Clusters* [astro-ph/0108186].

*[2] N. P. Vogt *et al.*, *Astrophys. J.*, **465**, 115 (1996). レビューまたは，最近の文献として，A. Aragón-Salmanca, in *Galaxy Evolution Across the Hubble Time – Proceedings of I.A.U. Symposium* 235, eds. F. Combes, J. Palous [astro-ph/0610587].

*[3] レビューは，S. Perlmutter, B. P. Schmidt, in *Supernovae & Gamma Ray Bursts*, ed. K. Weiler, Springer (2003) [astro-ph/0303428]; P. Ruiz-Lapuente, *Astrophys. Space Sci.*, **290**, 43 (2004) [astro-ph/0304108]; A. V. Filippenko, in *Measuring and Modeling of the Universe*, Carnegie Observatories Astrophysics Series Vol 2., Cambridge University Press [astro-ph/0307139]; *Lect. Notes Phys.*, **645**, 191 (2004) [astro-ph/0309739]; N. Panagia, *Nuovo Cimento*, **B 210**, 667 (2005) [astro-ph/0502247].

Cosmology Project）[*4] および高赤方偏移超新星探査チーム（High-z Supernova Search Team）[*5]によって得られたIa型超新星の観測データが，光度距離と赤方偏移の関係に関する理論的予言（式（1.5.45））と比較された．

超新星宇宙論プロジェクトは，赤方偏移 z が 0.18 から 0.83 にある 42 個の Ia 型超新星の見かけの光度と赤方偏移の関係を，他の超新星探査から得られた赤方偏移 0.1 以下の近傍 Ia 型超新星と合わせて解析した．結果を図 1.1（50 ページ）に示す．

99%の信頼度で，このデータは $\Omega_\Lambda = 0$（あるいは $\Omega_\Lambda < 0$）を棄却する．$\Omega_K = \Omega_R = 0$，すなわち $\Omega_\Lambda + \Omega_M = 1$ を持つ平坦な宇宙論を仮定すると，データは

$$\Omega_M = 0.28^{+0.09}_{-0.08}\ (1\ 標準偏差に相当する統計誤差)^{+0.05}_{-0.04}\ (同定された系統誤差)$$

を与える（これらの結果はハッブル定数や，超新星の絶対光度と時間変化の関係の較正の絶対値によらないが，この関係の傾きには依存する）．これより宇宙年齢（式（1.5.43））が得られ，

$$t_0 = 13.4^{+1.3}_{-1.0} \times 10^9 \left(\frac{70\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}}{H_0}\right) 年$$

となる．もし $\Omega_M = 0.28$ と $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$ を仮定すれば，式（1.5.48）は負の減速パラメータ，$q_0 = -0.58$ を与える．すなわち，**宇宙膨張は加速している**．

高赤方偏移超新星探査チームは，16 個の高赤方偏移 Ia 型超新星（赤方偏移は 0.16 から 0.97，うち 2 個は超新星宇宙論プロジェクトのものを含む）を 34 個の近傍超新星と合わせて解析し，空間曲率の仮定によらず 99.7%の信頼度で $\Omega_\Lambda > 0$ と結論した．彼らの結果を図 1.2（51 ページ）に示す．

平坦な宇宙モデルにおける最良適合値は $\Omega_M = 0.28 \pm 0.10$ と $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$ で，宇宙年齢は $(14.2 \pm 1.5) \times 10^9$ 年である（セファイド変光星の距離指標の不定性を含む）．$\Omega_M \geqq 0$ のみを仮定し，より自由度の多い光度曲線のモデルを用いて，彼らは 99.5%の信頼度で $q_0 < 0$ と結論した．すなわち，加速膨張が強く示唆されるのである．8 個の新しい超新星を 230 個の Ia 型超新星のサンプルに加える[*6]ことで $1.4\,\Omega_M - \Omega_\Lambda = -0.35 \pm 0.14$ が求まり，$\Omega_\Lambda > 0$ に対するさらなる証

[*4] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.*, **517**, 565 (1999) [astro-ph/9812133]. また，S. Perlmutter *et al.*, *Nature*, **391**, 51 (1998) [astro-ph/9712212].

[*5] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.*, **116**, 1009 (1998) [astro-ph/9805201]. また，B. Schmidt *et al.*, *Astrophys. J.*, **507**, 46 (1998) [astro-ph/9805200].

[*6] J. L. Tonry *et al.*, *Astrophys. J.*, **594**, 1 (2003) [astro-ph/0305008].

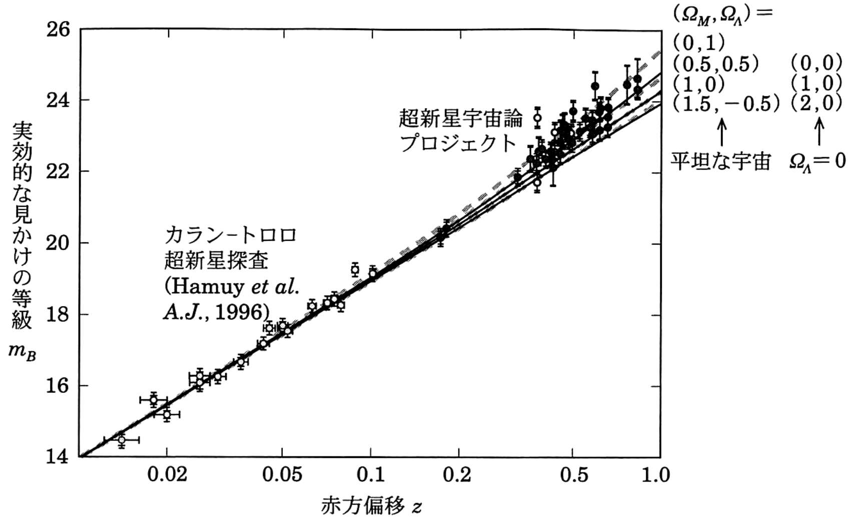


図 1.1　暗黒エネルギーの証拠．1998 年，超新星宇宙論プロジェクトによる．S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.*, **517**, 565 (1999) [astro-ph/9812133] より抜粋．青色バンドにおける実効的な見かけの等級（超新星の光度曲線を用い，絶対光度の変化は補正してある）を，超新星宇宙論プロジェクトで観測された 42 個の高赤方偏移の Ia 型超新星，およびカラン–トロロ超新星探査で得られた 18 個の低赤方偏移の Ia 型超新星の赤方偏移とともに示す．横棒は，特異速度に 300 km s^{-1} の不定性があると仮定した場合に対応する宇宙論的赤方偏移の不定性を表す．破線と実線は，それぞれ $\Omega_K = 0$ あるいは $\Omega_\Lambda = 0$ という宇宙モデルで様々な Ω_M の値を仮定した場合得られる，実効的見かけ等級の理論曲線である．

拠を得た．真空のエネルギーの存在は，超新星宇宙論プロジェクト*7が新しい超新星のサンプルを加え，平坦な宇宙モデルに対して $\Omega_\Lambda = 0.75^{+0.06}_{-0.07}$ (統計誤差) ± 0.032 (系統誤差) を得たことでより強固となった．

両グループとも，Ω_Λ と Ω_M の線形結合を与えることを認識している．超新星宇宙論プロジェクトでは $0.8\Omega_M - 0.6\Omega_\Lambda$，高赤方偏移超新星探査チームでは $\Omega_M - \Omega_\Lambda$，あるいは $1.4\Omega_M - \Omega_\Lambda$ である．式 (1.5.48) にも見られるようなこれらの線形結合における負の符号は，物質と真空のエネルギーが宇宙の加速膨張に

---

*7　R. Knop *et al.*, *Astrophys. J.*, **598**, 102 (2003) [astro-ph/0309368].

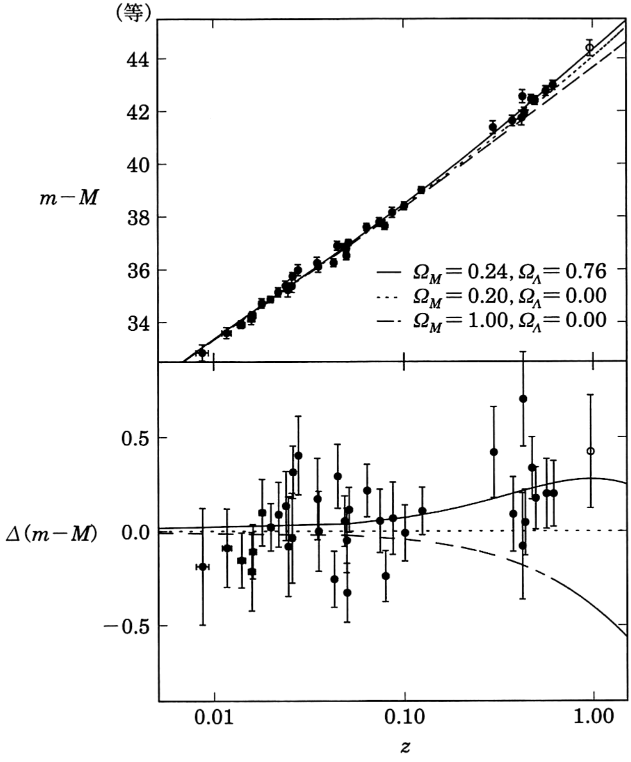


図 1.2　暗黒エネルギーの証拠．1998 年，高赤方偏移超新星探査チームによる．A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.*, **116**, 1009 (1998) [astro-ph/9805201] より抜粋．上の図では Ia 型超新星の距離指数 $m - M$ を赤方偏移 z に対して示した．曲線は $\Omega_\Lambda = 0$ を持つ二つの宇宙モデル，およびデータによく適合する $\Omega_M = 0.24$，$\Omega_\Lambda = 0.76$ を持つ平坦な宇宙モデルでの理論曲線である．下の図では，距離指数の観測データと $\Omega_M = 0.2$，$\Omega_\Lambda = 0$ を持つ宇宙論モデルの予言値（水平な破線）との差 $\Delta(m - M)$ を示す．

対して逆の効果をもたらすことに起因している．物質は膨張を減速させ，正の真空のエネルギーは加速させる．これらの線形結合に見られる負の値は，$p \simeq -\rho$ を持つ真空のエネルギーのように振る舞う何らかのエネルギー成分の存在を示している．この成分は**暗黒エネルギー**と呼ばれている．

余談だが，これらの Ω_Λ と Ω_M の線形結合は，過去の宇宙論研究の標的だった減速パラメータ q_0 を与える組み合わせ $\Omega_M/2 - \Omega_\Lambda$（式（1.5.48））とはだいぶ異なっている．したがって，宇宙論的距離にある Ia 型超新星の観測を単純に q_0 の測定だとみなすのは正しくない．

高赤方偏移超新星探査チームは次に，超新星を見つけ，その超新星の時間発展を追うという一連の作業を，同じサーベイ観測プログラムの中で行うようになった*8．彼らは 23 個の新しい Ia 型超新星を発見し，そのうちの 15 個は $z > 0.7$ であった．これらの新しい超新星をトンリーらによって以前用いられた 230 個の超新星と合わせることで，平坦な宇宙における最良適合値 $\Omega_M = 0.33$，$\Omega_\Lambda = 0.67$ を得た．

$\Omega_\Lambda > \Omega_M$ を示す超新星のデータの重要な特徴は，Ia 型超新星の見かけの光度が赤方偏移とともに減少するスピードが，$\Omega_M = 1$ と $\Omega_\Lambda = 0$ を持つアインシュタイン–ド・ジッターモデルで期待されるものより速いことである．真空のエネルギーが見かけの光度に及ぼす効果は，二つの極端な宇宙モデルで計算された光度距離を比べることで調べられる．どちらのモデルも物質と放射は含まない．一つ目，真空のエネルギーのみで支配された平坦な宇宙は $\Omega_\Lambda = 1$ と $\Omega_K = \Omega_M = \Omega_R = 0$ を持ち，式（1.5.45）より，

$$d_L(z) = \frac{z + z^2}{H_0} \quad \text{（真空のエネルギーのみが支配する宇宙）} \tag{1.6.1}$$

を得る．二つ目，空っぽの宇宙は $\Omega_K = 1$ と $\Omega_\Lambda = \Omega_M = \Omega_R = 0$ 持ち，式（1.5.45）より，

$$d_L(z) = \frac{z + z^2/2}{H_0} \quad \text{（空っぽの宇宙）} \tag{1.6.2}$$

を得る．明らかに，真空のエネルギーはすべての z において光度距離を増加させるように働く．同様な光度距離の増加は，より現実的な宇宙モデルを比べてみても得られる．図 1.3 に $\Omega_\Lambda = 0.7$，$\Omega_M = 0.3$，$\Omega_K = \Omega_R = 0$ を持つモデルと，真

*8 B. J. Barris *et al.*, *Astrophys. J.*, **502**, 571 (2004) [astro-ph/0310843].

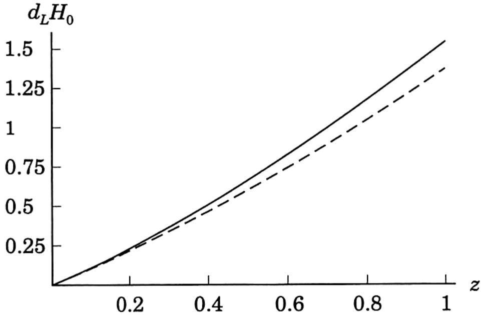


図 1.3 二つの宇宙モデルにおける光度距離と赤方偏移の関係. 上の実線は $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_K = \Omega_R = 0$ で, 下の破線は $\Omega_K = 0.7$, $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = \Omega_R = 0$. 縦軸は光度距離にハッブル定数をかけたもの.

空のエネルギーがないモデル $\Omega_K = 0.7$, $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = \Omega_R = 0$ における光度距離を示す.

超新星宇宙論プロジェクトも高赤方偏移探査チームも, 彼らが測定した光度距離と Ia 型超新星の赤方偏移の関係が, 図 1.3 の下の曲線に比べて上の曲線により近いことを発見した. 式 (1.4.9) によれば, 両グループによって発見された負の q_0 は, そこそこ大きい赤方偏移の Ia 型超新星の見かけの光度が, $q_0 = 0$ を持つ空っぽの宇宙モデルの場合に比べて小さいことに対応している. この事実は, 宇宙膨張が物質によって支配されており, したがって $q_0 > 0$ で, そこそこ大きい赤方偏移の見かけの光度が $q_0 = 0$ の場合に比べて大きい, という従来の期待と反するものであった.

加速膨張と見かけの光度の減少の関係は, 1.5 節で議論したニュートン的な宇宙モデルに基づいて理解できる. このモデルでは, ある遠方銀河から観測される赤方偏移は, その観測された光が放たれた時刻の銀河の速度によっている. しかし, この銀河からの光は現在, 銀河までの距離を 2 乗したものに 4π をかけた面積に渡って広がっているから, 見かけの光度はこの銀河の**現在**の時刻での距離の 2 乗に逆比例している. もしこの銀河が, 空っぽの宇宙モデルのように, 宇宙開闢の時期から等速度で運動していれば, 我々から測ったあらゆる銀河までの距離は光が放たれたときの銀河の速度に比例しているだろう. 真空のエネルギーがなければ銀河は互いの重力相互作用によって減速する. したがって, 我々が観測す

る銀河の速度は，銀河が光を放った後に持つ速度よりも大きく，現在の時刻での距離は銀河の速度が一定だったなら持つであろう値より小さい．このことより，真空のエネルギーがなければ，これらの銀河中の超新星の見かけの光度は増加すると期待できる．しかし，実際観測された超新星の光度距離は，その親銀河の速度が一定だったなら持つであろう値よりも**大きく**，したがってこれらの銀河は減速しておらず加速していることになるのだ．これこそが，正の真空のエネルギーから期待できる効果なのである．

もちろん，見かけの光度の減少が加速膨張ではなく，光源と我々の間に介在する物質による光の吸収や散乱で生じている可能性もある．そのような効果は，吸収や散乱から生じる見かけの色の変化を考慮することで光度距離の真の増加と区別できるが，これは簡単ではない[*9]．この問題は，色を慎重に測定することで解決できる[*10]．しかしそれでも，色を変えずに見かけの光度を減らす何らかの銀河間媒体（グレイダストと呼ばれる）を考えることは可能であった．

この問題は，まずハッブル深宇宙探査（Hubble Deep Field）の領域中にある赤方偏移 $z = 1.7 \pm 0.1$ の銀河で発見された超新星 SN1997ff[*11]（この赤方偏移は，これまで発見された超新星の中で最大のものである）の研究[*12]，次に，新しくできた「より高赤方偏移の」超新星チーム（Higher-z Supernova Team）[*13]が発見した 16 個の新しい Ia 型超新星（そのうち 6 個が $z > 1.25$）の解析により，ほぼ解決した．これらの赤方偏移は非常に大きいため，超新星から放たれた光が我々に向かって飛んでいる時間の大部分において宇宙のエネルギー密度は宇宙定数でなく物質によって占められており，したがってその頃の宇宙膨張は現在のように加速しておらず減速しているはずである．二つのグループの，より小さな赤方偏移における結果を Ω_M と Ω_Λ を用いて解釈したものが正しいとすれば，これらの新しい超新星の見かけの光度は，光度距離と赤方偏移の間に線形関係を仮定したものより**大きい**はずであり，光の吸収や散乱では説明できなくなる．これを図 1.4 で見る．この図は二つの宇宙モデルから計算された（H_0^{-1} を単位とする）

---

*9　たとえば，A. Aguirre, *Astrophys. J.*, **525**, 583 (1999) [astro-ph/9904319].

*10　R. Knop *et al.*, 脚注 7 を参照; または，M. Sullivan *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **340**, 1057 (2003) [astro-ph/0211444].

*11　R. L. Gilliland, P. E. Nugent, M. M. Phillips, *Astrophys. J.*, **521**, 30 (1999).

*12　A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.*, **560**, 49 [astro-ph/0104455].

*13　A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.*, **607**, 665 (2004) [astro-ph/0402512].

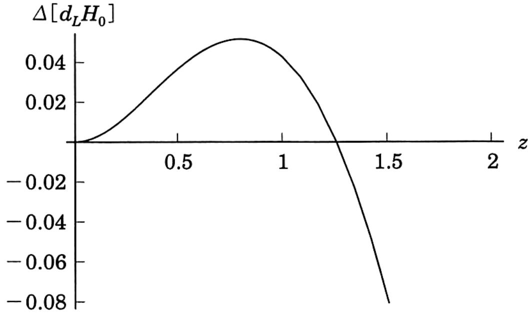


図 1.4 光度距離に H_0 をかけたもの．現実的な宇宙モデル $\Omega_\Lambda = 0.7$，$\Omega_M = 0.3$，$\Omega_K = \Omega_R = 0$ の光度距離から空っぽの宇宙モデル $\Omega_K = 1$，$\Omega_\Lambda = \Omega_M = \Omega_R = 0$ のものを引き，赤方偏移の関数として示す．

光度距離の差を示している．一つは現実的な宇宙モデル $\Omega_\Lambda = 0.7$，$\Omega_M = 0.3$，$\Omega_K = \Omega_R = 0$ であり，もう一つは空っぽの宇宙モデル $\Omega_K = 1$，$\Omega_M = \Omega_K = \Omega_R = 0$ である．中間の赤方偏移では現実的なモデルの光度距離が空っぽのモデルのものより大きいが，$z > 1.25$ では現実的なモデルの光度距離の方が小さくなることがわかる．これはまさに観測結果を説明する．すべての超新星の見かけの光度は，1998 年の研究で得られた宇宙論パラメータ $\Omega_M \approx 0.3$，$\Omega_\Lambda \approx 0.7$ と無矛盾であるが，グレイダストと $\Omega_\Lambda = 0$ から期待されるものとは矛盾する．

これらの結論はその後，赤方偏移が 0.5 程度の Ia 型超新星の光度距離の測定によってさらに強化された*14．2006 年，リースら*15は，ハッブル宇宙望遠鏡を用いて発見した 21 個の新しい Ia 型超新星を発表した．そのうち 13 個は，測光ではなくスペクトルで測定された赤方偏移が 1 を超えていた．これらの超新星の光度距離と赤方偏移を以前に発見された Ia 型超新星のデータと合わせることで，物質優勢期から真空のエネルギー優勢期への移行に関するさらなる証拠が与えられた．さらにこれから，$z > 1$ における圧力とエネルギー密度の比が $w = -1$ と無矛盾で，その時間変化が速くないことが示された．

もう一つの深刻な問題は，Ia 型超新星の絶対光度が，超新星の起こる時期に依存しているかもしれないという可能性である．Ia 型超新星は星の一生の中でも特

*14 A. Clocchiatti *et al.*, *Astrophys. J.*, **642**, 1 (2006) [astro-ph/0510155].

*15 A. Riess *et al.*, *Astrophys. J.*, **659**, 98 (2007) [astro-ph/0611572].

殊な瞬間に生じるため，これらの超新星の光度に対する進化の効果は，銀河全体に対するものほど重要でないと期待される．なぜなら銀河の場合，遠方にあるものほど早期の姿を見ていることになるからだ[16]．たとえそうであっても，Ia 型超新星の絶対光度は超新星の元となる二つの星の化学組成に影響され，そしてそれは親銀河の進化に影響される[17]．そのような効果は，超新星の絶対光度と減光時間，および絶対光度と本来の色との間の相関を考慮することで減らすことができる．減光時間も色も，超新星の元となる星の化学組成に依存すると思われている．また，暗黒エネルギーの存在の証拠は，非常に異なる歴史と非常に異なる環境を持つ Ia 型超新星の部分サンプルの研究でも見つかっている[18]．上記の $z > 1.25$ を持つ 7 個の超新星の研究の結果，$\Omega_\Lambda = 0$ を持つ宇宙モデルは，超新星の絶対光度のいかなる単調進化と組み合わせようとも，暗黒エネルギーの効果の代わりになれないことがわかった．

他に，ひょっとすると超新星の見かけの光度と赤方偏移の関係に影響を及ぼすかもしれない効果を挙げると：

(1) 弱い重力レンズ効果が超新星の観測に及ぼす影響は，非常に小さい領域のみを観測しているのでない限り[19]小さいと考えられている[20]（弱い重力レンズは 9 章で議論する）．最遠方で見つかった超新星 SN1997ff の見かけの光度は重力レンズによって増光されており[21]，したがって，より近傍の超新星の見かけの光度の減少がやはりグレイダストのせいかもしれないと思われた時期もあった．しかし，同じグループによるその後の解析[22]では，重力レンズによるこの超新星の増光は以前考えられていたものよりも小さく，重力レンズによる補正が現在の宇宙論研究に及ぼす影響は小さいと報告された．高赤方偏移超新星探査チームのメ

---

*16 D. Branch, S. Perlmutter, E. Baron, P. Nugent, contribution to the *Supernova Acceleration Probe Yellow Book*, Snowmass (2001) [astro-ph/0109070].

*17 P. Podsiadlowski *et al.*, [astro-ph/0608324]. 親銀河の星間塵による減光も進化に影響するかもしれない．T. Totani, C. Kobayashi, *Astrophys. J.*, **526**, 65 (1999) を見よ．

*18 M. Sullivan *et al.*, 脚注 10 を参照．

*19 A. Cooray, D. Huterer, D. E. Holz, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 021301 (2006).

*20 A. J. Barber, *Astron. Soc. Pacific Conf. Ser.*, **237**, 363 (2001) [astro-ph/0109043].

*21 E. Mörtstell, C. Gunnarsson, A. Goobar, *Astrophys. J.*, **561**, 106 (2001); C. Gunnarsson, in *Proceedings of a Conference on New Trends in Theoretical and Observational Cosmology –Tokyo*, 2001, [astro-ph/0112340].

*22 J. Jönsson *et al.*, *Astrophys. J.*, **639**, 991 (2006) [astro-ph/0506765].

ンバーは，この効果は実は $\Omega_M = 0.35$，$\Omega_\Lambda = 0.65$ という結果との整合性を高める方向に働くと報告している*[23]．

(2) 風変わりな真空のエネルギーなどというものがなくとも，宇宙の物質分布の非一様性によって加速膨張が生じる，という話がある*[24]．が，十分に大きな空間スケールで平均化した宇宙が高精度で一様であることから，これはありそうもない話である*[25]．

(3) Ia 型超新星には二つの種類がある，といういくつかの証拠がある*[26]．数の少ない方は，白色矮星の衝突か，あるいは爆発の物理の違いに関連しているかもしれない．これが宇宙論研究に及ぼす影響はこれから調べる必要がある．

(4) 暗黒エネルギーの存在には影響しないがその測定の精度を悪くする不定性に，光度距離と赤方偏移の曲線の形が，地上からの観測と宇宙からの観測を含む莫大な数の観測所のデータから求められており，それら異なる観測所間の結果を比較する際に様々な較正誤差が存在する，という状況が挙げられる．

(5) 歴史的に見て高赤方偏移の光源の光度距離の測定を難しくしてきたものに，測定が「放射的（bolometric）」でない，つまり，すべての波長に等しく感度があるわけではなく，主に限られた領域の波長のみに感度がある，という現実的問題がある．宇宙論的赤方偏移は光源の見かけの色を変えるため，見かけの光度が測定される感度を変える．これを考慮するため，観測された見かけの等級は，いわゆる **K 補正**（K-correction）を用いて補正される*[27]．超新星の K 補正は暗黒エネルギーの発見前に導かれており*[28]，その後改良されている*[29]．超新星の観測精度が向上するとともに，K 補正にはさらなる改良が必要となるかもしれない．

---

*[23] N. Benítez *et al.*, *Astrophys. J.*, **577**, L1 (2002) [astro-ph/0207097].

*[24] E. W. Kolb, S. Matarrese, A. Notari, A. Riotto, *Astrophys. J.*, **626**, 195 (2005) [hep-th/0503117]; E. W. Kolb, S. Matarrese, A. Riotto, *New J. Phys.*, **8**, 322 (2006) [astro-ph/0506534]; E. Barausse, S. Matarrese, A. Riotto, *Phys. Rev. D*, **71**, 063537 (2005).

*[25] É. É. Flanagan, *Phys. Rev. D*, **71**, 103521 (2005) [hep-th/0503202]; G. G. Geshnizjani, D. J. H. Chung, N. Afshordi, *Phys. Rev. D*, **72**, 023517 (2005) [astro-ph/0503553]; C. M. Hirata, U. Seljak, *Phys. Rev. D*, **72**, 083501 (2005) [astro-ph/0503582]; A. Ishibashi, R. M. Wald, *Class. Quant. Grav.*, **23**, 235 (2006) [gr-qc/0509108].

*[26] D. Howell *et al.*, *Nature*, **443**, 308 (2006); S. Jha, A. Riess, R. P. Kirshner, *Astrophys. J.*, **654**, 122 (2007); R. Quimby, P. Höflich, J. C. Wheeler, 0705.4467.

*[27] 銀河の観測に用いられる K 補正に関する議論，およびもとの文献に関しては G&C, p. 443 を見よ．

*[28] A. Kim, A. Goobar, S. Perlmutter, *Proc. Astron. Soc. Pacific*, **108**, 190 (1995) [astro-ph/9505024].

これらの加速膨張の観測は，定数である真空のエネルギーの存在と無矛盾ではあるが，このエネルギー密度が本当に定数であることの証明にはなっていない．式（1.5.18）によれば，加速膨張の存在は，宇宙のエネルギー密度の大部分が $\rho + 3p < 0$ を持つことを要求するが，それは通常の物質や放射ではあり得ない．この成分が**暗黒エネルギー**と呼ばれるようになったのである[*30]．

暗黒エネルギーが定数でないという可能性を考慮するため，暗黒エネルギーの圧力（$p_{\rm D.E.}$）とエネルギー密度（$\rho_{\rm D.E.}$）の比を $p_{\rm D.E.}/\rho_{\rm D.E.} \equiv w$ として観測データを解析するのが慣例となっている．真空のエネルギー密度が定数（そのときは $w = -1$）の場合を除けば，w が時間変化しない理由はない（これとは異なる，より物理的な可能性は 1.12 節で調べる）．それでも，w が定数であるが必ずしも -1 でない宇宙モデルはよく調べられている．暗黒エネルギーの密度と Ω_K が負でなければ宇宙は継続して膨張し続け，$\dot{a}$ は常に正である．式（1.1.34）に見られるように，この場合の暗黒エネルギーの密度は a^{-3-3w} のように変化する．もし w が（超新星の観測で示されたように）負であれば，十分時間が経過すると最終的に，放射と物質のエネルギー密度は暗黒エネルギーの密度と比べて無視しうるほど小さくならねばならない．もし $w < -1/3$ であれば，フリードマン方程式（1.5.19）における空間曲率の効果も最終的に無視できるようになる．$w > -1$ かつ $\dot{a} > 0$ の場合の解は $t - t_1 \to Ca^{(3+3w)/2}$ となる．ここで $C > 0$ で，t_1 は積分定数である．これは継続的な膨張解で，膨張率は時間とともに減少する．しかし，しばしば**ファントムエネルギー**（phantom energy）と呼ばれる $w < -1$ の場合の $\dot{a} > 0$ を持つ解は，$C > 0$ として $t_1 - t \to Ca^{(3+3w)/2}$ となる．この解は，$a(t)$ が t_1 において無限大になるという特筆すべき性質を持つ．$w \geqq -1$ の場合と異なり，$w < -1$ の場合にはすべての構造――銀河団，銀河，星，原子，原子核，陽子と電子――は最終的に暗黒エネルギーに付随する斥力によって引き裂かれてしまうだろう[*31]．

2003 年，暗黒エネルギーの時間依存性をさらに調べるため，5 年間の超新星観測計画である超新星レガシーサーベイ（Supernova Legacy Survey）[*32]がマウ

[*29]（57 ページ）P. Nugent, A. Kim, S. Perlmutter, *Proc. Astron. Soc. Pacific*, **114**, 803 (2002) [astro-ph/0205351].

[*30] 一般的なレビューは，P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 559 (2003).

[*31] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, N. N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 071301 (2003) [astro-ph/0302506].

ナケア山頂のカナダ–フランス–ハワイ望遠鏡において開始された．初年度の終わりには 71 個の高赤方偏移の Ia 型超新星が発見，研究され，$\Omega_M = 0.263 \pm 0.042$（統計誤差）$\pm\, 0.032$（系統誤差）が得られた．この超新星の データとスローン・デジタル・スカイサーベイ（8 章で議論する）のデータを合わせ，暗黒エネルギーが時間に対して一定の $w \equiv p_{\rm D.E.}/\rho_{\rm D.E.}$ を持つと仮定することで，$w = -1.023 \pm 0.09$（統計誤差）$\pm\, 0.054$（系統誤差）が得られた．この値は，真空のエネルギーが定数であるとしたときの値 $w = -1$ と無矛盾である．本書の執筆中に，もう一つの超新星探査観測である ESSENCE で得られた 60 個の Ia 型超新星の結果が報告された[*33]（ESSENCE は「Equation of State: Supernovae trace Cosmic Expansion」の略である）．これらの結果と超新星レガシーサーベイの結果を合わせることで，ESSENCE のチームは時間一定の w に対して $w = -1.07 \pm 0.09$（1 標準偏差に相当する統計誤差）$\pm\, 0.13$（系統誤差）と $\Omega_M = 0.267^{-0.028}_{-0.018}$（1 標準偏差に相当する統計誤差）を得た．

暗黒エネルギーが宇宙のエネルギー密度の大部分を占めているという結論は，7.2 節で議論するように宇宙マイクロ波背景放射の観測で確認されている．この結論はまた，別種の 2 次の距離指標である銀河団の高温ガスから発せられる X 線の観測からも支持されている．1.9 節では銀河団の赤方偏移，温度，見かけの X 線光度と視直径から，銀河団に含まれる高温ガス（「バリオン」）と全物質量の比が与えられ，この比が $d_A^{-3/2}$ に比例することを見る．ここで，d_A は銀河団の角径距離である．この議論は逆に使える．高温ガスと全物質量の比がサンプル中すべての銀河団において等しいとすれば，X 線の観測は銀河団の角径距離と赤方偏移の関係を見いだすのに用いることができる[*34]．この手法を用い，チャンドラ衛星による赤方偏移 $0.07 < z < 0.9$ を持つ 26 個の銀河団の X 線観測から，定数の真空エネルギーと冷たい暗黒物質を持つ宇宙モデルに対して 68%の信頼度で $\Omega_\Lambda = 0.94^{+0.21}_{-0.25}$ が得られた[*35]．暗黒エネルギーの密度が一定であるという仮定をはずす一方，$\Omega_K = 0$ と定数の w を仮定し，さらにバリオン物質の密度が宇宙の元素合成（3.2 節で議論する）から示唆される値を取るように要請すれば，チャンドラ衛星の解析から $1 - \Omega_M = 0.76 \pm 0.04$，そして暗黒エネルギーの圧力と密

*32 （58 ページ）P. Astier, *et al.*, *Astron. Astrophys.*, **447**, 31 (2006) [astro-ph/0510447].

*33 M. Wood-Vesey *et al.* [astro-ph/0701041].

*34 S. Sasaki, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **48**, 119 (1996) [astro-ph/9611033]; U.-L. Pen, *New Astron.*, **2**, 309 (1997) [astro-ph/9610147].

度の比として $w = -1.20^{+0.24}_{-0.28}$ が得られる．

バースト時間の長い長期型のガンマ線バーストを 2 次の距離指標として用いることで，光度距離の測定をさらに高赤方偏移まで伸ばすことができるかもしれない．ガンマ線バーストは一定の絶対光度を持っていないが，その絶対光度が，ガンマ線バーストの見かけの光度が最大となるエネルギー，および特徴的な時間スケールと相関を持つという示唆がある*36．

暗黒エネルギーの発見は，他の観測を解釈する上でも，また基礎物理に対する挑戦という意味でも，非常に重要である．暗黒エネルギーの密度がなぜこんなに小さい値を取るのか，というのが最も大きな問題である．現在の理論物理学の確かさが確認されている 300 GeV のエネルギーあたりまでに存在する既知の量子場の量子ゆらぎは，真空のエネルギー密度として $(300\,\mathrm{GeV})^4$，あるいは 10^{27} $\mathrm{g/cm^3}$ 程度の大きさの寄与をする．この値は，観測されている暗黒エネルギーの密度 $\Omega_\Lambda \rho_{0,\mathrm{crit}} \simeq 10^{-29}$ $\mathrm{g/cm^3}$ と比べ，数にして 10^{56} 倍とはるかに大きい．もしかすると，まだ未知の量子場の寄与，たとえばより高エネルギーに存在する量子場や，あるいは場の方程式そのものによる寄与，がこの大きすぎる真空のエネルギーを打ち消すのかもしれないが，そのような打ち消し合いは小数点 56 桁に渡って正確でなくてはならない．そんな奇跡のような打ち消し合いは未だ知られていない*37．今日における暗黒エネルギーの発見は，二つ目の問題を与える．なぜ暗黒エネルギーの密度は，宇宙の歴史において我々が住んでいるこの特定の瞬間に，物質のエネルギー密度と同程度になっているのだろうか？

これらの問題を考える上で，真空のエネルギー密度が本当に時間に関する定数なのか，あるいは時間変化するのかを知ることが決定的に重要である．そしてこの問いの答えは，将来的に遠方の Ia 型超新星の研究や，大きな赤方偏移における

---

*35　(59 ページ) S. W. Allen, R. W. Schmidt, H. Ebeling, A. C. Fabian, L. van Speybroeck, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **353**, 457 (2004) [astro-ph/0405340]. より早期にこの手法が適用された例は，Rines *et al.*, *Astrophys. J.*, **517**, 70 (1999); S. Ettori, A. Fabian, *Astron. Soc. Pac. Conf. Ser.*, **200**, 369 (2000); S. W. Allen, R. W. Schmidt, A. C. Fabian, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **334**, L11 (2002); S. Ettori, P, Tozzi, P. Rosati, *Astron. & Astrophys.*, **398**, 879 (2003). 高温ガスと全物質量の比が変化する可能性は，R. Sadat *et al.*, *Astron. & Astrophys.*, **437**, 310 (2005); L. D. Ferramacho, A. Blanchard, *Astron. & Astrophys.*, **463**, 423 (2007) [astro-ph/0609822] によって調べられている．

*36　C. Firmani, V. Avila-Reese, G. Ghisellini, G. Ghirlanda, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **372**, 28 (2006) [astro-ph/0605430]; G. Ghirlanda, G. Ghisellini, C. Firmani, *New J. Phys.*, **8**, 123 (2006) [astro-ph/0610248].

*37　この問いに答えるための試みのレビューは，S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 1 (1989) を見よ．

他の観測によって得られるかもしれない．時間変化する暗黒エネルギー（第 5 元素という意味の**クインテッセンス**という名で知られる）の可能性は，1.12 節においてより詳しく考察する．

1.7　宇宙膨張か光の疲労か？

我々は，赤方偏移と光度距離の観測を理論と比較する際，1.2 節と 1.4 節で述べたような赤方偏移と光度距離の通常の理解を頼りにしている．この理解の正当性を脅かすものがあるとすればそれは光の吸収や散乱，つまり遠方の光源から届く光子の数が減る効果である．この効果はたいていの場合，吸収や散乱の影響を受ける光源の色を測定することで考慮されるが，前節で述べたようなグレイダストの効果は色の測定で発見できない．見かけの光度が減少するその他の効果としては，光子が銀河間磁場によってアクシオン と呼ばれる粒子に転化される現象が挙げられる．

もう一つ，さらに極端な話がある．宇宙論的赤方偏移が発見されて以来，これを膨張宇宙の証拠とする解釈では納得できない疑念がかけられてきた．宇宙は実は静的であり，光子は単にエネルギーを失っているだけであって，したがって光の振動数は光子が我々に向かって進む間に減少し，これが距離にしたがって赤方偏移が増加することを説明する，というのである．そんなことがあり得るのだろうか？

これらの話は，以下の観測をもってすべて棄却できる．上述のような効果は光度距離 $d_L(z)$ を変えるが，角径距離 $d_A(z)$ は変えない．一方で，通常の理解では宇宙モデルによらず式（1.4.12）が成り立ち，すなわち $d_L(z)/d_A(z) = (1+z)^2$ である．したがって，この関係式を検証できれば，$d_L(z)$ に対するこれまでの理解を確認できるのだ．

$d_L(z)/d_A(z)$ に関するこの公式は昔，トールマンによって提唱された「表面輝度テスト」で確認できる[*1]．もし光源が単位固有面積あたりの絶対光度 $\mathcal{L}$ を持てば，面積 A を持つ領域の見かけの光度は $\ell = \mathcal{L}A/4\pi d_L^2$ で与えられる．観測者から見てこの領域は立体角 $\Omega = A/d_A^2$ を持つ．**表面輝度** B は，単位立体角あたりの見かけの光度として定義されるから，

[*1] R. C. Tolman, *Proc. Nat. Acad. Sci*, **16**, 5111 (1930); *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*, Oxford Press (1934): 467.

$$B \equiv \frac{\ell}{\Omega} = \frac{\mathcal{L}\, d_A^2}{4\pi d_L^2}. \tag{1.7.1}$$

通常のビッグバン宇宙論では比 d_A/d_L が式（1.4.12）で与えられるから,

$$B = (1+z)^{-4}\left(\frac{\mathcal{L}}{4\pi}\right). \tag{1.7.2}$$

したがって，もし単位面積あたりの絶対光度 $\mathcal{L}$ が同じである光源があれば，それらの光源の表面輝度は正確に $(1+z)^{-4}$ にしたがって赤方偏移とともに減少するはずである.

「光の疲労」論と通常のビッグバン理論との重要な違いの例を挙げると，通常の理論では光源におけるどのような時間に関する変化率も $(1+z)^{-1}$ の分だけ減少するが，光の疲労論ではそのようなことはない．通常の理論において高赤方偏移で減少する変化率の一つは，単位時間あたりに光源によって放射される光子の数である．見かけの光度の公式（1.4.1）に現れる二つの $(1+z)^{-1}$ のうち，一つはこの効果によるものである．もう一つは，個々の光子のエネルギーが赤方偏移によって減る効果である．一方，もし光子の放射率が赤方偏移によらず，静的でユークリッド幾何を持つ宇宙において光子が我々に向かって進む間にエネルギーを失ったとすると，距離 d にある光源の見かけの光度 L は $L/4\pi(1+z)d^2$ で与えられ，分母には光子のエネルギーの減少による一つの $1+z$ しかないはずだ．すなわち，光度距離は $(1+z)^{1/2}d$，ユークリッド幾何を持つ宇宙の角径距離は単に d であるから，比は $d_L/d_A = (1+z)^{1/2}$，そして遠方銀河の表面輝度は $(1+z)^{-1}$ のように減少するはずだ.

ルービンとサンデイジ*2は，ハッブル宇宙望遠鏡を用いて赤方偏移 0.76，0.90，0.92 にある三つの遠方銀河団中の銀河の表面輝度を測定し，それを近傍銀河の表面輝度と比較した．彼らの測定した z の増加に対する B の減少は，銀河進化の効果に対する妥当な補正をすれば式（1.7.2）と無矛盾であり，静的な宇宙における「光の疲労」で期待される振る舞い $B \propto (1+z)^{-1}$ とはまったく食い違っていた.

標準のビッグバン理論では，光子の放射率に限らず，遠方の光源から観測されるあらゆる変化率が $1/(1+z)$ の分だけ低くなる．これは，前節の超新星宇宙論プロジェクトで用いられたいくつかの Ia 型超新星の光度の減少率の観測で確認され

*2 L. M. Lubin, A. Sandage, *Astron. J.*, **122**, 1084 (2001) [astro-ph/0106566]. 彼らの早期の仕事は，A. Sandage, L. M. Lubin, *Astron. J.*, **121**, 2271 (2001); L. M. Lubin, A. Sandage, *ibid*, 2289 (2001); *Astron. J.*, **122**, 1071 (2001) [astro-ph/0106563] に記述されている.

ている[*3]．絶対光度が本来の光度減少時間と相関しているという仮説は，観測される光度減少時間が，本来の減少時間を $1+z$ だけ引き延ばしたものとすることでよりうまくいくことがわかっている．これは，赤方偏移を光の疲労で説明するような静的でユークリッド幾何を持つ宇宙ではまったく説明できない現象である．

1.8 年齢

これまで見てきたように，ハッブル定数および物質と真空エネルギーの密度パラメータ Ω_M，Ω_Λ を知ることで宇宙の年齢を求められる．本節では，宇宙にある天体の中で最古のものの年齢の計算に基づく，宇宙年齢の様々かつ独立な推定値を議論する．

恒星の外側部分で見つかる金属（ヘリウムよりも重い元素）は主に前の世代の星から生じているから，一般に最古の星のスペクトルは小さい金属量を示す．これらはいわゆる種族 II の星で，銀河系のハロー，とりわけ球状星団の中に見られる．古い星の年齢を求めるには二つの主要な方法がある．

重元素の存在量

初期の存在量 $A_{\text{初期}}$ を持つ原子核が崩壊率 λ で崩壊すれば，時間 T が経過した後の存在量 A は $A = A_{\text{初期}}\exp(-\lambda T)$ で与えられる．したがって，もし $A_{\text{初期}}$ が既知で A を測定できれば，T を $T = \lambda^{-1}\ln(A_{\text{初期}}/A)$ から計算できる．しかし不幸なことに，$A_{\text{初期}}$ を知ることも A を測定することもできなさそうである．一方で，二つの原子核の初期存在量 $A_{1,\,\text{初期}}$，$A_{2,\,\text{初期}}$ の**比**を計算し，それらの現在の**相対的な**存在量 A_1/A_2 を測定することは可能である．この相対存在量は，

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{A_{1,\,\text{初期}}}{A_{2,\,\text{初期}}}\right)\exp\Big((\lambda_2-\lambda_1)T\Big)$$

で与えられ，したがって年齢として，

$$T = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) - \ln\left(\frac{A_{1,\,\text{初期}}}{A_{2,\,\text{初期}}}\right)\right] \tag{1.8.1}$$

を得る．もし初期の存在量が同程度で，かつ観測される存在量が大きく異なれば，求められた T は初期存在量の比の正確な値にあまり依存しない．

---

*3 B. Leibundgut *et al.*, *Astrophys. J.*, **466**, L21 (1996); G. Goldhaber *et al.*（超新星宇宙論プロジェクト），*Astrophys. J.*, **558**, 359 (2001) [astro-ph/0104382].

重い放射性元素の初期の相対的な存在量は，これらの重元素がいわゆるr過程によって作られたとするゆるぎない仮定に基づいて求められる．r過程とは，重力崩壊型超新星の爆発のときに鉄のような比較的軽い元素で急激な中性子捕獲が起こり，その際に生成された中性子過剰の同位体が，複数のベータ崩壊 を経た後に同じ数の核子を持つ原子核で最も安定なものに落ち着く，という現象である．この手法を用い，崩壊率 0.971×10^{-9}/ 年を持つ ^{235}U の地球上での存在量から，銀河系の年齢に対して下限値が得られている．地球上の ^{235}U の分布の不定性を避けるため，^{235}U の存在量は同位体 ^{238}U の存在量との比として測定される．^{238}U は ^{235}U よりも小さい崩壊率 0.154×10^{-9}/ 年を持つが，化学的には ^{235}U と同じように振る舞うため，地球上での分布も ^{235}U と同じだと思われる．初期の ^{235}U と ^{238}U の存在量の比は $1.65 \pm 0.15 : 1$ と見積もられている．^{238}U を作るには ^{235}U にさらに3つの中性子を加えねばならないため，^{235}U の方が多い．一方，^{235}U の崩壊率の方が大きいおかげで（幸運にして）現在の ^{235}U の存在量は ^{238}U に比べて小さい．現在における地球上のウラン同位体の存在比は 0.00723 であり，これよりウランが崩壊した時間として以下の値が得られる．

$$\frac{\ln(1.65) - \ln(.00723)}{0.971 \times 10^{-9}/\text{年} - 0.154 \times 10^{-9}/\text{年}} = 66\,\text{億年} \quad [10\,\text{億年} = 10^9\,\text{年}].$$

しかし，太陽は第二，あるいは第三世代の星（「種族I」と呼ばれる）であるから，そのウランが生成されたのは太陽系ができるずっと前だったとも考えられる．ウランの存在比の測定は地球上や隕石における他の元素の存在比，たとえば ^{232}Th/^{238}U や ^{187}Re/^{187}Os，の測定で補われ，重元素が生成された期間の長さを自由パラメータとして扱うことで解析されている．この解析により，太陽系近傍の重元素の年齢の下限としてより強い（が，より不定性の大きい）値，96億年を得る*1．

銀河系の年齢に対するより強い下限値は，これらの手法を太陽系外の金属欠乏星中の重元素に適用することで得られる．スペクトル線を用いてトリウムが最初に観測されたのは，非常に金属量の少ない（したがって古いと思われる）K型巨星，CS 22892−052 であった*2．r過程で生成された，より安定な元素の相対

---

*1 B. S. Meyer, D. N. Schramm, *Astrophys. J.*, **311**, 406 (1986).

*2 C. Sneden *et al.*, *Astrophys. J.*, **467**, 819 (1996); *Astrophys. J.*, **591**, 936 (2003) [astro-ph/0303542]. トリウムの存在量に関する早期の仕事の文献も載せたレビューは，C. Sneden, J. J. Cowan, *Astronomia y Astrofisica* (*Serie de Conferencia*), **10**, 221 (2001) [astro-ph/0008185].

的存在量を吸収線スペクトルの強度から測定した結果，この星におけるほとんどの元素の相対的存在量は太陽系のものと一致した．唯一の例外が，観測にかかった元素のうち最も重い元素であるトリウムであった．トリウムの半減期は（^{232}Th の場合）140 億年である．トリウムの存在量の減少が放射性崩壊のためであるとすると，この星のトリウムの年齢は 141 ± 30 億年と推定できる．他にも，CS 22892−052 および他の金属欠乏星の年齢の推定は，トリウムとユウロピウム（Eu），またトリウムとランタン（La）の存在比を用いて推定されている*3.

ウラン 238 は ^{232}Th よりも早く崩壊するので，ウランとトリウムの存在量を両方用いることで恒星の年齢をよりよく推定できる．もちろん，それにはウランとトリウム両方のスペクトル線が検出されねばならない．CS 22892−052 のスペクトルにはウランの吸収線は見られなかったが，その後他の二つの金属欠乏星 CS 31082−001 と BD+17°3248 において，豊富な r 過程の元素とともに 1 階電離したウランの吸収線が観測された．CS 31082−001 で観測されたウランとトリウムの存在比は $10^{-0.74\pm0.15}$ だが，初期の存在比の推定値は一定せず，$10^{-0.255}$ や $10^{-0.10}$ といった値が得られている．これらの数値を式（1.8.1）に代入すれば，この星の年齢として 125 ± 30 億年を得る*4．その後の観測では 140 ± 20 億年*5，155 ± 32 億年*6，141 ± 25 億年*7が得られている．同様にして BD+17°3248 の年齢は 138 ± 40 億年と計算されている*8（図 1.5（66 ページ）を見よ）．より最近では，新しく発見された金属欠乏星 HE 1523−0903 にウランとトリウムの両方が見つかり，トリウムとウランの存在量と他の r 過程の元素の比，およびトリウムとウランの存在比を用いることで，この星の年齢として 132 億年が得られた*9.

主系列からの折れ曲がり

絶対光度と表面温度の主系列関係を満たす恒星は，まだその中心核が水素を燃焼している．中心核が水素を燃やし尽くしてヘリウム核になると，水素燃焼は

---

*3 I. I Ivans *et al.*, *Astrophys. J.*, **645**, 613 (2006) [astro-ph/0604180], およびそこに参照されている文献を見よ.

*4 R. Cayrel *et al., Nature*, **409**, 691 (2001).

*5 V. Hill *et al.*, *Astron. Astrophys.*, **387**, 580 (2002).

*6 H. Schatz *et al.*, *Astrophys. J.*, **579**, 626 (2002).

*7 S. Wanajo, *Astrophys. J.*, **577**, 853 (2002).

*8 J. J. Cowan, *et al.*, *Astrophys. J.*, **572**, 861 (2002) [astro-ph/0202429].

*9 A. Frebel *et al.*, *Astrophys.*, **660**, L117 (2007). [astro-ph/0703414].

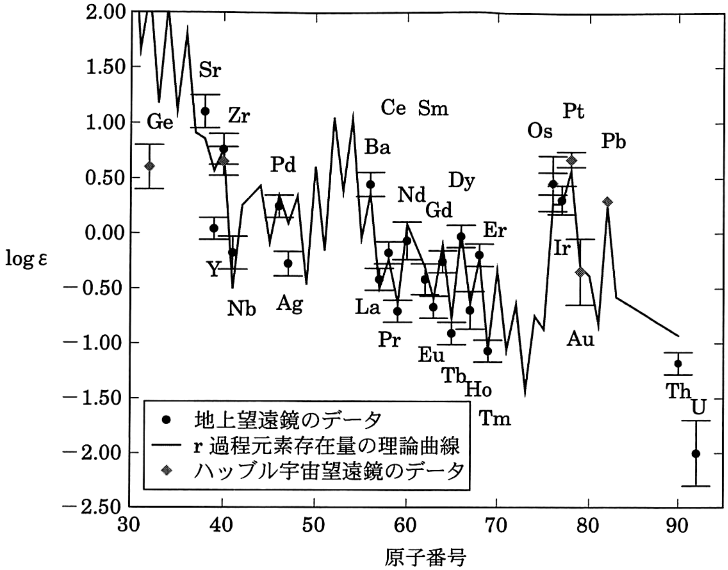


図 1.5　恒星 BD+17°3248 に見られる，r 過程で生成された元素の存在量．データは地上の望遠鏡およびハッブル宇宙望遠鏡を用いて得られた．比較のため，太陽系のデータに基づく初期存在量の理論値を実線で示す．トリウムとウランの観測値が初期存在量の理論値より低いことに着目しよう．これより BD+17°3248 の年齢として 138 ± 40 億年が得られる．J. J. Cowan *et al.*, *Astrophys. J.*, **572**, 861 (2002) [astro-ph/0202429] より抜粋．

（一時的に）不活性状態にあるヘリウム核のまわりの層で継続する．そして星は主系列を離れ，より高い光度と低い表面温度を持つ方向に進化する．したがって，年齢は同じだが質量が様々に異なる恒星でできた星団の主系列は，その折れ曲がりの位置が，時間の経過につれてより低い光度へと移動していく（図 1.6 を見よ）．おおまかに言って，折れ曲がりの位置にある恒星の絶対光度は，その星団の年齢の逆数に比例している．とりわけ，多くの球状星団中の主系列の観測からは様々な年齢として*10 115 ± 13 億年，120 ± 10 億年，118 ± 12 億年，140 ± 12 億年，120 ± 10 億年，122 ± 18 億年などが得られている．シュラムによるまと

*10　文献は，B. Chaboyer, *Phys. Rep.*, **307**, 23 (1998) [astro-ph/9808200] を見よ．

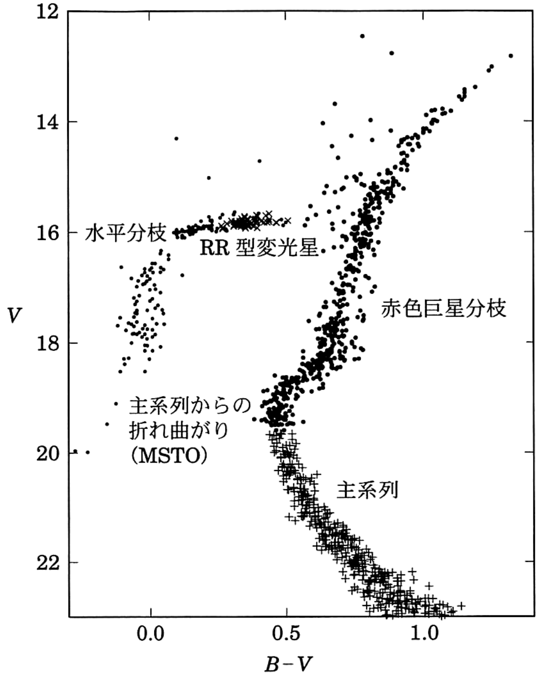


図 1.6 球状星団 M 15 の色–等級図．可視バンド（V バンド）で測定した，M 15 に属する恒星の見かけの等級を縦軸に示す．M 15 に属する星はすべて地球からほぼ等距離にあるので，見かけの等級は絶対等級と比べて定数だけ異なる．縦軸を上に行くほど絶対光度は大きい．青色バンド（B バンド）における見かけの等級と V バンドの等級の差を横軸に示す．これは恒星の表面温度の指標であり，横軸を右に行くほど温度は下がる．もし M 15 が若い球状星団であれば主系列は左上に向けて伸び続けるはずだが，主系列からの折れ曲がり（Main Squence Turn-Off; MSTO）およびこの図のその他の特徴より，この球状星団の年齢が 150 ± 30 億年と求まる．図は，B. Chaboyer, *Phys. Rep.*, **307**, 23 (1998) より抜粋．データは P. R. Durrell, W. E. Harris, *Astron. J.*, **105**, 1420 (1993) に基づく．

め[*11]によれば，これらの値の食い違いのほとんどはヘリウム，酸素，そして鉄の初期の存在量といったパラメータを同じ値にそろえて計算し直すことで取り除くことができ，そこから 140 ± 20（統計誤差）± 20（系統誤差）億年が得られている．このようにして求められた年齢は，仮定された球状星団までの距離に依存することに注意しよう．距離の推定値が $\delta d/d$ だけ変われば，絶対光度の推定値は $\delta L/L = -2\delta d/d$ だけ変わり，したがって年齢の推定値は $\delta t/t \approx +2\delta d/d$ だけ変わる．ヒッパルコス衛星によって距離が求められた9個の球状星団から得られた銀河系の年齢の推定値[*12]は 132 ± 20 億年である．

これらの年齢は，以前最も支持されていた宇宙モデル，すなわち $\Omega_M = 1$ で真空のエネルギーがないモデル，にとって問題となる．このモデルでは宇宙年齢が，

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = 93 \left(\frac{70\ \mathrm{km/s/Mpc}}{H_0}\right) \text{億年}$$

で与えられ，それは銀河系内の最古の天体よりもいくらか若い．ただし，その差は標準偏差の何倍もあるわけではない．定数の真空のエネルギーを含めることでこの問題は回避できる．1.5節で述べたように，もし宇宙に真空のエネルギーしかなければ $a(t) \propto \exp(Ht)$ であり，宇宙年齢は無限大となる．1.6節で見たように，超新星の距離–赤方偏移関係によって真空のエネルギー密度が現在の宇宙の物質エネルギー密度の約2倍あると得られているから，宇宙年齢は $2/3H_0$ よりもっと大きな値を取る．

$$t_0 = 134^{+13}_{-10} \left(\frac{70\ \mathrm{km/s/Mpc}}{H_0}\right) \text{億年}.$$

これで矛盾の危機は去ったが，それは銀河系内の球状星団が宇宙そのものと同じくらい歳をとっていると**仮定**した場合の話である．実際，最古の星や最古の星団の年齢と，赤方偏移–距離関係から得られた H_0，Ω_M，Ω_Λ を用いて求めた宇宙年齢との一致は非常に印象深いものがある．7.2節で見るように，これらの年齢は，宇宙マイクロ波背景放射の異方性の観測から得られた宇宙論パラメータを用いて計算された年齢とも素晴らしく一致する．

本節ではこれまで，銀河系の現在の年齢しか考えてこなかった．高赤方偏移にある他の銀河の年齢，つまり，我々が現在観測する光が遠い昔にこれらの銀河を

*11 D. Schramm, in *Critical Dialogues in Cosmology*, N. Turok, ed., World Scientific, (1997): 81.

*12 E. Carretta, R. G. Gratton, G. Clementini, F. F. Pecci, *Astrophys. J.*, **533**, 215 (2000) [astro-ph/9902086].

出発した時刻における年齢，を求めることも可能である．もちろん，これら銀河系外の銀河の星や球状星団を個々に分解することはできないが，銀河のスペクトルを使うとその年齢を推定することができる．金属量や散乱等の効果を分離するにはスペクトルの情報すべてが必要となるが，大雑把に言って，銀河は赤いほど古い．なぜなら銀河が赤いほど，より多くの明るく青い星がすでに主系列を離れたことになるからである．電波銀河 53W091（$z = 1.55$）と 53W069（$z = 1.43$）の年齢[*13]はそれぞれ $\simeq 35$ 億年，30–40 億年と見積もられている．この結果は，真空のエネルギーに意味のある下限値を与える．非相対論的な物質と定数の真空のエネルギーを持つ宇宙モデルでは，赤方偏移 z で観測される光が放射された時刻における宇宙年齢は式（1.5.42）で与えられ，

$$t(z) = \frac{1}{H_0}\int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{dx}{x\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}} \tag{1.8.2}$$

である．赤方偏移 z で観測されるいかなる銀河も，その光が放射された時刻における宇宙年齢より若くなければならない．たとえば，$\Omega_K = \Omega_R = 0$ を持つ平坦な宇宙，つまり $\Omega_M = 1 - \Omega_\Lambda$ では，$z = 1.55$ にあって年齢 $\simeq 35$ 億年を持つ銀河の存在は，Ω_Λ の下限値[*14]として約 0.6 を与える（ただし $H_0 = 70\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$）．

究極的にはこれらの年齢の決定精度が十分よくなり，宇宙年齢の赤方偏移依存性を測定できる日が来るかもしれない．もちろん，銀河は宇宙の歴史の中で様々な時刻に形成されるわけだから，一つの銀河の年齢を用いただけでは，我々が観測する光がその銀河を出発した時刻での宇宙年齢を推定することはできない．しかし，宇宙の一様性により，ある一つの種類に属する銀河の形成時期の**分布**は宇宙のどこでも同じはずである．したがって，異なる赤方偏移にある適当な種類の銀河の年齢をその分布の中で差をとってやることで，これらの赤方偏移における t の差を推定できる．ロバートソン–ウォーカーのスケール因子 $a(t)$ は，時刻 t に放射された光の現在の赤方偏移 $z(t)$ と $1 + z(t) = a(t_0)/a(t)$ を通じて関係しているから，$\dot{z} = -H(t)(1 + z)$ を得る．2 階微分 $\ddot{z}$ を計算するため，$K = 0$，$H^2(t) = 8\pi G\rho(t)/3$，そして $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$ のときには次の式が成り立つことに着目しよう．

---

*13 J. S. Dunlop *et al.*, *Nature*, **381**, 581 (1996); J. S. Dunlop, in *The Most Distant Radio Galaxies - KNAW Colloquium, Amsterdam, October* 1997, eds., Best *et al.* [astro-ph/9801114].

*14 L. M. Krauss, *Astrophys. J.*, **489**, 486 (1997); J. S. Alcaniz, J. A. S. Lima, *Astrophys. J.*, **521**, L87 (1999) [astro-ph/9902298].

$$\dot{H}(t) = -4\pi G\Big(\rho(t) + p(t)\Big). \tag{1.8.3}$$

したがって，$K = 0$ のときには，

$$\ddot{z} = \frac{\dot{z}^2}{1+z}\left(\frac{5}{2} + \frac{3p}{2\rho}\right). \tag{1.8.4}$$

これより，様々な赤方偏移における t の差の測定によって，宇宙の最近の時刻における p/ρ が測定できるかもしれない[*15].

1.9 質量

1.6 節において，光度距離と赤方偏移の関係の観測から，非相対論的物質の臨界密度に対する比 Ω_M が約 30%だと示唆されていることを述べた．この節では，Ω_M を測定する他の独立な手法を考える．

ビリアル平衡下にある銀河団

Ω_M を測定する古典的な手法[*1]は，ビリアル平衡を用いて様々な銀河団の質量を測定し，それらの銀河団の質量と絶対光度の比を平均し，そして空の全光度の測定と組み合わせることで全質量密度を求める，というものである．このとき，銀河団の質量–光度比が，宇宙全体が持つ典型的な値と同じであるという仮定が入る．

ビリアル定理を導くため，質量 m_n を持つ多くの質点（銀河でも恒星でもただの点でも良い）からなる非相対論的な重力束縛系を考えよう．重心から見た質点の位置は（通常のデカルト座標で）$\boldsymbol{X}_n$ とする．質点の従う運動方程式は，

$$m_n \ddot{X}_n^i = -\frac{\partial V}{\partial X_n^i} \tag{1.9.1}$$

で与えられ，ポテンシャルエネルギー V は，

$$V = -\frac{1}{2}\sum_{n\neq\ell}\frac{G\,m_n\,m_\ell}{|\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{X}_\ell|} \tag{1.9.2}$$

である．式（1.9.1）に X_n^i をかけて n と i に関して和をとれば，

$$-\sum_n X_n^i \frac{\partial V}{\partial X_n^i} = \sum_n m_n\,\boldsymbol{X}_n\cdot\ddot{\boldsymbol{X}}_n = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum_n m_n \boldsymbol{X}_n^2 - 2T \tag{1.9.3}$$

---

*15　R. Jimenez, A. Loeb, *Astrophys. J.*, **573**, 37 (2002) [astro-ph/0106145].

*1　F. Zwicky, *Astrophys. J.*, **86**, 217 (1937); J. H. Oort, in *La Structure et l'Evolution de l'Universe*, Institut International de Physique Solvay, R. Stoops (1958): 163.

を得る．ここで T は（重心の運動を除いた）内部運動エネルギーであり，

$$T = \frac{1}{2}\sum_n m_n \dot{\boldsymbol{X}}_n^2. \tag{1.9.4}$$

ここで，この系が平衡状態に達した（ビリアル化した）としよう．このとき，個々の質点は動いているが，統計的な進化は止まる．特に，

$$0 = \frac{d^2}{dt^2}\sum_n m_n \boldsymbol{X}_n^2 \tag{1.9.5}$$

が成り立つ（この結果より，$\boldsymbol{X}_n$ が重心から見た座標であると特定した重要性がわかる．もしそうでなければ，銀河団全体の運動が t^2 に比例する項を上記の和に加算し，式（1.9.5）が成り立たなくなる）．V は座標に逆比例しているから式（1.9.3）の左辺は単に V となる．これらから**ビリアル定理**が導ける．

$$2T + V = 0. \tag{1.9.6}$$

T と V を以下のように書き換えよう．

$$T = \frac{1}{2}M\langle v^2\rangle, \qquad V = -\frac{1}{2}GM^2\langle\frac{1}{r}\rangle, \tag{1.9.7}$$

ここで $\langle v^2\rangle$ は（質量で重みをつけた）重心に対する相対速度の二乗平均，$\langle 1/r\rangle$ は質点間の距離の逆数の平均値，そして $M = \sum_n m_n$ は全質量である．したがって，式（1.9.6）から M に関するビリアル公式が得られる．

$$M = \frac{2\langle v^2\rangle}{G\langle 1/r\rangle}. \tag{1.9.8}$$

この質量の導出法は，おとめ座銀河団のような不規則な銀河団には適用できない．なぜなら，このような銀河団は式（1.9.5）の条件を満たす状態に落ち着いておらず，したがっておそらくビリアル定理を満たさないからである．

一方，かみのけ座銀河団のようにそこそこ球状に見えるような銀河団に対しては，ビリアル定理が，少なくとも近似的には，成り立っていると考えられる．統計的平衡の一般論より，そのような銀河団において支配的な質量が持つ速度分散の平方根 $\sqrt{\langle v^2\rangle}$ は，銀河団内に観測される銀河の速度分散の平方根に等しいと期待できる．後者の速度分散はドップラー効果の広がりを用いて測定できる．これらの速度分散はまた，銀河団内の電離ガスの速度分散とも等しいと期待でき，それは，X 線天文学の登場以来行われてきたように，ガスの放射する X 線のスペク

トル観測を用いて測定できる．このような方法で求められた $\langle v^2 \rangle$ の値は距離の大きさに依存しない．一方，$\langle 1/r \rangle$ の値は見かけの角度から求められる．つまり，横向きの真の固有距離 d は，見かけの角度 θ と式（1.4.11）で与えられる角径距離 d_A を用いて $d = \theta d_A$ と与えられる．$z \ll 1$ にある近傍銀河団に対しては，式（1.4.9）と式（1.4.12）から $d_A \simeq z/H_0$，したがって $d \simeq \theta z/H_0$ が使える．すなわち，$z \ll 1$ における銀河団の $\langle 1/r \rangle$ の推定値は H_0 に比例し，式（1.9.8）から求められる M は $1/H_0$ に比例する．赤方偏移 z にある銀河団の絶対光度 L と見かけの光度 ℓ は $z \ll 1$ の場合，式（1.4.2）と式（1.4.9）を用いて $L = 4\pi z^2 \ell / H_0^2$ と書けるから，L の値は H_0^{-2} に比例し，したがってこれらから求まる質量–光度比は $H_0^{-1}/H_0^{-2} = H_0$ に比例する．

多くのメンバー銀河を持つ「裕福」な銀河団から求められた M/L はおおよそ 200–300 $h\,M_\odot/L_\odot$ である．ここで h は 100 km s^{-1} Mpc^{-1} を単位とするハッブル定数で，$M_\odot$ と $L_\odot$ はそれぞれ太陽の質量と光度である．たとえば，1996 年の研究[*2]では，赤方偏移が 0.17 と 0.55 の間にある 16 個の銀河団から $M/L = (295 \pm 53)\,h\,M_\odot/L_\odot$ が得られている．その後，同じグループ[*3]によって様々なバイアスが補正され，得られた値が $M/L = (213 \pm 59)\,h\,M_\odot/L_\odot$ である．ビリアル定理を 459 個の銀河団に適用した，より最近の研究[*4]によれば，$M/L \simeq 348\,h\,M_\odot/L_\odot$ である．

銀河団から得られたこれらの M/L の値はすべて，個々の銀河の可視領域から得られる質量–光度比の値よりも非常に大きい[*5]．個々の楕円銀河の質量–光度比はビリアル定理を用いて求められるが，このときの $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ は銀河内に含まれる星の速度分散の平方根である．このようにして得られた値は，大体の場合 10–20 $h\,M_\odot/L_\odot$ の範囲である[*6]．銀河団の可視光はすべて個々の銀河から来ているのだから，これらの結果より我々は，銀河団質量のほとんどが，何かしらの光を発しないものでできていると結論せざるを得ない．それは，銀河の外縁部の光って

[*2] R. G. Carlberg *et al.*, *Astrophys. J.*, **462**, 32 (1996).

[*3] R. G. Carlberg, H. K. C. Yee, E. Ellingson, *Astrophys. J.*, **478**, 462 (1997).

[*4] H. Andernach, M. Plionis, O. López-Cruz, E. Tago, S. Basilakos, *Astron. Soc. Pacific Conf. Ser.*, **329**, 289 (2005) [astro-ph/0407098].

[*5] この結論は，F. Zwicky, *Helv. Phys. Acta*, **6**, 110 (1933) によるかみのけ座銀河団の研究によって初めて導かれた．

[*6] T. R. Lauer, *Astrophys. J.*, **292**, 104 (1985); J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press (1987).

いない部分に存在するのかもしれないし，銀河間空間に存在するのかもしれない．この質量は，銀河をとりまく大きな暗黒ハローにあるのではないかと議論されており，その大きさは明るい銀河の場合 200 kpc にも達する*7．この暗黒物質の本質は宇宙論の未解決問題であり，本書でも頻繁に触れることになる．

余談であるが，ビリアル定理より与えられる楕円銀河の M/L が大きな値を持つため，これらの銀河の質量の大部分は太陽程度の明るさの星では説明できない．渦巻き銀河の M/L を求めることは難しいが，ベラ・ルービン*8の仕事に始まる一連の研究により，これらの銀河の質量の大部分もまた，明るい星では説明できないことがわかっている*9．もし渦巻き銀河の質量の大部分が銀河の中心領域の明るい部分にあったとするならば，この領域の外側にある星の回転速度はケプラーの法則 $v \propto r^{-1/2}$ に従わねばならない．しかし観測は，中心領域の外側の v はほぼ一定であり，さらには可視の銀河円盤の端を越えてさえなお一定であることを示している．これは，質量密度が $1/r^2$ に比例してゆるやかに減少するような球状のハローの場合に期待される現象であり，この場合銀河の質量の大部分はハローの外側の真っ暗な部分にあることになるだろう．ハロー中の重力マイクロレンズ効果（9.2 節で議論する）の欠如から，この質量は暗い星ではないと示唆する証拠があるが，銀河の物質の大部分がバリオンである可能性もまだ残されている．これに関しては詳しく述べないが，銀河形成は，恒星内部にあるのと同種のバリオン物質による冷却過程を含むため，宇宙の物質の大部分がバリオンでできていれば，銀河の M/L の値は宇宙全体の値に近くなる．

ビリアル定理を用いて銀河団から得られた M/L の値を使って宇宙の物質密度を求めるには，ただ単に銀河団体積あたりの光度を加算するだけでは足りない．なぜなら，宇宙の光の大部分は銀河団の外側にある「場の」銀河（散在銀河）から来ているからだ．代わりに，脚注 7 の文献で議論されるように，散在銀河が銀河団内の銀河と同程度の暗黒物質を持っていると仮定すれば，銀河団から求めた M/L の値を宇宙の全光度密度 $\mathcal{L}$ と以下のように組み合わせることで，全質量密度を求めることができる．

$$\rho_M = (M/L)\mathcal{L}. \tag{1.9.9}$$

---

*7 N. A. Bahcall, L. M. Lubin, V. Dorman, *Astrophys. J.*, **447**, L81 (1995).

*8 V. C. Rubin, W. K. Ford, N. Thonnard, *Astrophys. J.*, **225**, L107; **238**, 471 (1980).

*9 M. Persic, P. Salucci, *Astrophys. J. Supp.*, **99**, 501 (1995); M. Persic, P. Salucci, F. Stel, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **281**, 27P (1996).

見かけの光度と赤方偏移から推定される絶対光度の値は H_0^{-2} に比例し，赤方偏移から推定される距離は H_0^{-1} に比例するから，単位体積あたりの銀河の絶対光度を加算して求めた宇宙の全光度密度は $H_0^{-2}/(H_0^{-1})^3 = H_0$ に比例する．たとえば，1999 年の研究[*10]からは $\mathcal{L} = 2 \pm 0.2 \times 10^8\, h\, L_\odot\, \mathrm{Mpc}^{-3}$ が得られている．Ω_M を計算するという目的のためには，この結果を臨界質量密度と光度密度の比として書くのがより便利である．

$$\rho_{0,\mathrm{crit}}/\mathcal{L} = (1390 \pm 140)\, h\, M_\odot/L_\odot.$$

（ここで，$M_\odot = 1.989 \times 10^{33}$ g，1 Mpc $= 3.0857 \times 10^{24}$ cm，$\rho_{0,\mathrm{crit}} = 1.878 \times 10^{-29}\, h^2$ g/cm^3 を用いた．）M/L の値として $M/L = (213 \pm 53) h M_\odot/L_\odot$ を用いれば，

$$\Omega_M = \frac{M/L}{\rho_{0,\mathrm{crit}}/\mathcal{L}} = 0.15 \pm 0.02 \pm 0.04$$

を得る．最初の不定性は $\mathcal{L}$ の不定性，次の不定性は M/L の不定性に由来する．$\mathcal{L}M/L$ も $\rho_{0,\mathrm{crit}}$ も H_0^2 に比例することから，この手法で求めた Ω_M の値がハッブル定数の値によらないことは重要である．

この Ω_M の値は，超新星の赤方偏移–距離関係や，2.6 節と 7 章で議論するマイクロ波背景放射の異方性から導かれたものよりも幾分か小さい．しかし，これらの手法から導かれた値はすべて，Ω_M が明らかに 1 より小さいという点において一致している．

銀河団の X 線光度

銀河団内の暗黒物質は，通常の原子核や電子からできているのだろうか？　銀河団から放射される X 線を研究することで，通常の物質（原子核と電子）の臨界密度に対する比 Ω_B を，すべての非相対論的物質の臨界密度に対する比 Ω_M で割ったものを求めることができる．なぜなら，通常の物質粒子の衝突によってのみ，これらの X 線が放射されるからである．これらの衝突過程は通常の物質粒子の対からなるので，単位固有体積あたりの X 線の絶対光度は，

$$\mathcal{L}_X = \Lambda\Big(T_B\Big)\rho_B^2 \tag{1.9.10}$$

[*10] S. Folkes *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **308**, 459 (1999); M. L. Blanton *et al.*, *Astron. J.*, **121**, 2358 (2001).

の形を取る．ここで T_B と ρ_B はバリオン物質の温度と密度，そして $\Lambda(T)$ は温度と基礎物理定数で書ける既知の関数である．バリオン密度は静水圧平衡，すなわち（球対称の仮定のもとで）半径 r と $r+\delta r$ の間の微小面積 A にあるバリオンに加わる圧力と重力のつりあい，の方程式を満たす．

$$A\Big(p_B(r+\delta r) - p_B(r)\Big) = -\frac{A\delta r\, \rho_B(r)\, G}{r^2}\int_0^r 4\pi (r')^2\, \rho_M(r')\, dr'.$$

左辺を δr に関して 1 次までテイラー展開し，両辺を A と δr で割り，さらに理想気体の状態方程式 $p_B = k_{\mathcal{B}} T_B \rho_B / m_B$ を用いれば，

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{k_{\mathcal{B}}\, T_B(r)\rho_B(r)}{m_B}\right) = -\frac{G\rho_B(r)}{r^2}\int_0^r 4\pi (r')^2 \rho_M(r')\, dr'$$

を得る．ここで，$\rho_M(r)$ は半径 r における全質量密度，$k_{\mathcal{B}}$ はボルツマン定数，m_B はバリオンガス粒子の特徴的な質量の値，そして r は銀河団中心までの固有距離である．両辺に $r^2/\rho_B(r)$ をかけ，r に関して微分すれば以下の式を得る．

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho_B(r)}\frac{d}{dr}\left(\frac{k_{\mathcal{B}}\, T_B(r)\rho_B(r)}{m_B}\right)\right] = -4\pi G r^2 \rho_M(r). \tag{1.9.11}$$

もし冷たい暗黒物質の粒子，あるいは銀河間の暗黒物質を支配するいかなる粒子が等方的な速度分散を持っていると仮定すれば（しかしこの仮定にはあまり良い動機づけはないのだが），同じ手法がこれらの粒子にも使え，その密度 $\rho_D = \rho_M - \rho_B$ は以下の非線形な微分方程式に従う．

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho_D(r)}\frac{d}{dr}\left(\frac{k_{\mathcal{B}}\, T_D(r)\rho_D(r)}{m_D}\right)\right] = -4\pi G r^2 \rho_M(r). \tag{1.9.12}$$

ここで，$T_D(r)$ と m_D は暗黒物質の温度と質量である．もし完全な X 線データが存在し，光源の距離がわかっているとすれば，X 線の光度密度 $\mathcal{L}_X(r)$ が測定でき，(X 線のスペクトル観測より）バリオンの温度 $T_B(r)$ が銀河団の各半径において求まるから，式（1.9.10）より各半径におけるバリオンの密度 $\rho_B(r)$，さらに式（1.9.11）より各半径における全質量密度が得られる．これらからバリオンと全質量密度の比 ρ_B/ρ_M が計算できるし，もし興味があるならば式（1.9.12）から暗黒物質の速度分散 $k_{\mathcal{B}} T_D(r)/m_D$ も得られる．

実際には，たいていの場合，銀河団のある種のモデルを使う必要がある．もっ

とも単純なモデルでは，**等温的な球**を仮定する．すなわち温度 T_B と T_D が，少なくとも X 線の大部分が放射される銀河団中心付近においては，半径によらないという仮定である．さらに，銀河団内の高温銀河間ガスも暗黒物質も，同じ重力効果によって集められた，という仮定もしばしば使われる（これらの重力的効果はいわゆる「バイオレント・リラクゼーション」[*11]で記述されると考えられている．これは，物質のかたまり同士の接近遭遇によるもので，その場合の重力相互作用は，平均をとってなめらかにした重力場の相互作用では記述できない．このような状態から銀河が発生するには，バリオンガスのみに作用する，重力とはまったく異なった冷却過程が必要であり，銀河が比較的少ない暗黒物質と比較的低い質量–光度比を持つことの理由となる）．そうすれば，$\rho_B(r)$ と $\rho_M(r)$ は全体にかかる定数を除けば等しくなり，その定数はバリオンと全非相対論的物質の密度比の宇宙論的数値 Ω_B/Ω_M で与えられる．式（1.9.11）と式（1.9.12）を比べると，もし以下のように暗黒物質の速度分散と高温バリオンガスの速度分散が等しければ，$\rho_B(r)$ と $\rho_D(r)$，したがって $\rho_M(r)$ は互いに比例することがわかる．

$$k_{\mathcal{B}}T_B/m_B = k_{\mathcal{B}}T_D/m_D \equiv \sigma^2. \tag{1.9.13}$$

すると，式（1.9.11）も式（1.9.12）も以下の解を与える．

$$\rho_M(r) = \rho_M(0)\, F(r/r_0), \tag{1.9.14}$$

ただし，$F(0) \equiv 1$ である．r_0 は**コア半径**と呼ばれ，慣例的に，

$$r_0 \equiv \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_M(0)}} \tag{1.9.15}$$

で定義され，$F(u)$ は以下の微分方程式を満たす関数である．

$$\frac{d}{du}\left(\frac{u^2}{F(u)}\frac{dF(u)}{du}\right) = -9u^2F(u). \tag{1.9.16}$$

我々はさらに，ρ_M が座標原点 $\boldsymbol{X} = 0$ において解析的である，という境界条件を課さねばならない．これより，r のみの関数は $r = 0$ 近傍において r^2 の冪展開で書けることがわかり，したがって $F(u)$ は $u = 0$ 近傍において u^2 の冪展開 $F(u) = 1 + O(u^2)$ で書ける．この境界条件を課すことにより，式（1.9.16）は唯

[*11] D. Lynden-Bell, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **136**, 101 (1967).

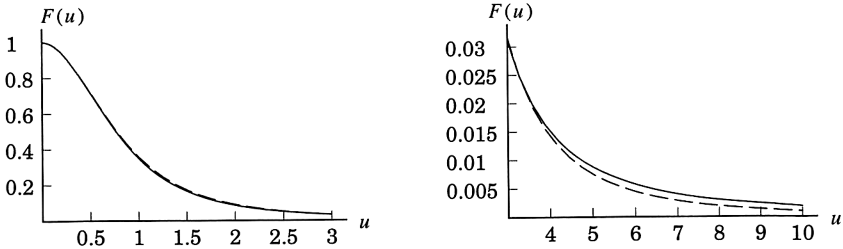


図 1.7 式 (1.9.16) の解（実線）と近似式 (1.9.17)（破線）. 左の図は u が小さい場合を示し，そこではこれら二つの線は区別できない.

一解を与え[*12]，小さい u では近似的に以下のように与えられる[*13].

$$F(u) \simeq (1+u^2)^{-3/2}. \tag{1.9.17}$$

式 (1.9.16) と近似式 (1.9.17) を図 1.7 に示す.

大きな u では $F(u)$ は厳密解 $2/9u^2$ に近づく．これを文字通りにとれば，全質量を求める積分は大きな r で無限大に発散する．したがって，σ^2 が定数であるという仮定は，大きな半径では破れていなければならない．$F(u)$ の関数形はしばしば以下のような形に一般化される[*14].

$$F(u) = (1+u^2)^{-3\beta/2},$$

ここで，β は 1 程度の値となるパラメータである.

また，式 (1.9.11) は解，

$$\rho_B(r) = \rho_B(0)F(r/r_0) \tag{1.9.18}$$

を持ち，同じ関数形の $F(u)$ と同じコア半径 r_0 を与える．コア半径は銀河団の X 線イメージから測定でき，σ^2 は X 線のスペクトルから測定できる．したがって，式 (1.9.15) から全非相対論的物質の中心密度 $\rho_M(0)$ が得られる．バリオン物質の中心密度 $\rho_B(0)$ は X 線の全光度から得られ，それはこれまでの仮定（および式 (1.9.10)）のもとでは，

*12 $F(u)$ の値は，たとえば J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University (1987) の表 4.1 を見よ.

*13 I. R. King, *Astron. J.*, **67**, 471 (1962).

*14 A. Cavaliere, R. Fusco-Fermiano, *Astron. Astrophys.*, **49**, 137 (1976).

$$L_X \equiv \int d^3x\, \mathcal{L}_X = 4\pi \Lambda(T_B)\, r_0^3\, \rho_B(0)^2 \mathcal{I} \tag{1.9.19}$$

で与えられ，$\mathcal{I}$ は，

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^\infty u^2 F^2(u)\, du \tag{1.9.20}$$

である．式（1.9.16）の解は無限大の質量を与えるが，全 X 線光度は有限であり，$\mathcal{I} = 0.1961$ である（近似式（1.9.17）は $\mathcal{I} = \pi/16 = 0.1963$ を与える）．

ある赤方偏移 z にある銀河団に対しては，銀河団の見かけの大きさの観測から得られるコア半径 r_0 は角径距離 $d_A(z)$ に比例するが，X 線スペクトルから得られる温度と速度分散は距離には依存しない．したがって，式（1.9.15）で与えられる中心の全物質密度 $\rho_M(0)$ の値は $1/d_A^2(z)$ に比例する．一方，見かけの X 線光度から推定される X 線の絶対光度 L_X は（すべての絶対光度がそうであるように）光度距離の 2 乗 $d_L^2(z)$ に比例するから，$r_0 \propto d_A$ を思い出せば，式（1.9.19）で与えられる $\rho_B(0)$ は $[d_L^2(z)/d_A^3(z)]^{1/2}$ に比例する．これらより，赤方偏移 z にある一つの銀河団の観測から得られる中心密度の比の値は，銀河団の距離に対して以下のように依存する．

$$\frac{\rho_B(0)}{\rho_M(0)} \propto d_L(z) d_A^{1/2}(z) = (1+z)^2 d_A^{3/2}(z), \tag{1.9.21}$$

ここで，光度距離と角径距離の関係式（1.4.12）を用いた．

$z \ll 1$ のとき $d_A(z) \simeq d_L(z) \simeq z/H_0$ であるから，式（1.9.21）より，小さい赤方偏移の銀河団の観測から得られる $\rho_B(0)/\rho_M(0)$ の値は $H_0^{-3/2}$ に比例することがわかる．銀河団内のバリオンの質量の大部分は銀河の外側にある高温ガスにあると考えられており，もしこの質量の全質量に対する比が宇宙全体における比と等しいとすれば[*15]，どのような値の H_0 を仮定しようともすべての銀河団に対して同じ値の $\rho_B(0)/\rho_M(0)$ が得られるはずであり，それは Ω_B/Ω_M に等しい．しかし，このようにして求めた Ω_B/Ω_M の値は $H_0^{-3/2}$ に比例する．たとえば，シンドラー[*16]は，様々な研究から得られた $\rho_B(0)/\rho_M(0)$ の値として，$H_0 = 65$ km s^{-1} Mpc^{-1} を仮定した上で 0.14，0.11，0.12，0.12 を出している．これらの平均

---

*15 これは，S. D. M. White, J. F. Navarro, A. E. Evrard, C. S. Frenk, *Nature*, **366**, 429 (1993) で議論されている．この仮定を支持する計算を 8.3 節で述べる．

*16 S. Schindler, in *Space Science Reviews*, **100**, 299 (2002), ed., P. Jetzer, K. Pretzl, R. von Steiger, Kluwer [astro-ph/0107028].

値 0.12 を $H_0 = 65\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$ の場合の Ω_B/Ω_M の宇宙論的な値として採用すれば，一般的なハッブル定数に対する値として，

$$\Omega_B/\Omega_M \simeq 0.06\ h^{-3/2} \tag{1.9.22}$$

を得る．ここで h はいつもの通り $100\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$ を単位とするハッブル定数である．したがって我々は，かなりの確度を持って，**銀河団質量のうち小さな割合のみが，X 線を放射するバリオンの形を持つ**と結論できる．

一方で，決して小さくない範囲の赤方偏移を持つ銀河団の研究から一様な $\rho_B(0)/\rho_M(0)$ の値を得るには，正しい z 依存性を持つ $d_A(z)$ を用いなければならない．1.6 節で触れたように，銀河団の観測はこのようにして $d_A(z)$ の z 依存性を求めるために使われてきた．

銀河団を無衝突粒子の集合体として扱うコンピュータシミュレーションからは，中心コアの兆候が見られないことを述べておかねばならない[*17]．これらのシミュレーションは，中心に近い距離 r にある暗黒物質の密度が r^{-1} から $r^{-3/2}$ のように発散することを示している．一方で，このような分布の暗黒物質の重力場と静水圧平衡状態にあるバリオンガスの密度は，式（1.9.18）から期待されるようなコアを持つことが示されている[*18]．いずれにせよ，中心からの距離が r_0 より大きな場所にある暗黒物質とバリオンガスの密度は同じ分布を持つ．

3.2 節で見るように，重水素や他の軽元素の同位体の存在量から $\Omega_B h^2$ の値を推定でき，それと式（1.9.22）を用いれば $\Omega_M h^{1/2}$ の値を導くことができる．その他にも Ω_M や $\Omega_M h^2$ の値を求めるいくつかの手法があり，本書では重力レンズ（9.3 節），スニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果（2.5 節），宇宙マイクロ波背景放射の異方性（2.6 節と 7.2 節）を用いた手法を述べる．このうち最後の二つの手法は $\Omega_B h^2$ の値も与える．これらに加え，銀河団の進化，宇宙論的速度場，銀河団の相関関数などに基づいた手法があり[*19]，それらは構造形成の詳細な動力学的理論によっている．

[*17] J. F. Navarro, C. S. Frenk, S. D. M. White, *Astrophys. J.*, **462**, 563 (1996) [astro-ph/9508025]; **490**, 493 (1997) [astro-ph/9610188]; T. Fukushige, J. Makino, *Astrophys. J.*, **477**, L9 (1997) [astro-ph/9610005]; B. Moore *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **499**, L5 (1998).

[*18] N. Makino, S. Sasaki, Y. Suto, *Astrophys. J.*, **497**, 555 (1998). また，Y. Suto, S. Sasaki, M. Makino, *Astrophys. J.*, **509**, 544 (1998); E. Komatsu, U. Seljak, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **327**, 1353 (2001) を見よ．

[*19] レビューは，N. A. Bahcall, *Astrophys. J.*, **535**, 593 (2000) [astro-ph/0001076]; M. Turner, *Astrophys. J.*, **576**, L101 (2002) [astro-ph/0106035]; S. Schindler, *op. cit.*; K. A. Olive, *lectures given at Theoretical Advanced Study Institute on Elementary Particle Physics*, Boulder [astro-ph/0301505].

1.10 銀河間ガスによる吸収

最初の銀河や銀河団が生まれるもととなった宇宙の原子核や電子からなるガスの一部は，まだ銀河間の空間に残っているはずである．このガス中の原子や分子は，より遠方にある銀河やクエーサーからやってくる光や電波の共鳴吸収によって観測可能なはずだが，大部分は高温で質量の大きい第一世代の星の光で電離されてしまったと考えられている．これら第一世代の星はとうの昔にその寿命を終えており，種族 III の星と呼ばれている．現在では，クエーサーの一部は宇宙の電離が完結する以前に形成されたと考えられており，これらの非常に遠方なクエーサーからの光の共鳴吸収を用いれば，銀河間ガスを観測することができるはずである．

原子の遷移によって，遠方の光源が光線を放射したとしよう．その光は時刻 t_1 に周波数 ν_1 で放射され，時刻 t_0 に周波数 ν_0 で地球に届いた．この光が到達するまで，ある時刻 t における周波数は赤方偏移を受けた周波数 $\nu_1 a(t_1)/a(t)$ であるから，もし銀河間ガスが（単位時間あたりに）$\Lambda(\nu, t)$ の割合で周波数 ν の光を吸収し，かつ光を放射しないとすれば，この光線の強度 $I(t)$ は以下の方程式にしたがって減少する．

$$\dot{I}(t) = -\Lambda\Big(\nu_1 a(t_1)/a(t), t\Big)\, I(t).$$

しかし，もし銀河間ガスがゼロでない温度 $T(t)$ を持っていれば，誘導放射によってこの光線に光子が加えられる．光子 1 個あたりの誘導放射率はアインシュタインの公式[*1] $\exp\left(-h\nu/k_{\mathcal{B}}T\right)\Lambda(\nu, t)$ で与えられ，したがって光線の強度は以下の方程式に従う．

$$\dot{I}(t) = -\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_1 a(t_1)}{k_{\mathcal{B}}T(t)a(t)}\right)\right]\Lambda\Big(\nu_1 a(t_1)/a(t), t\Big)\, I(t). \tag{1.10.1}$$

これより，地球で観測される強度は，

$$I(t_0) = \exp(-\tau) I(t_1) \tag{1.10.2}$$

と書け，τ は**光学的厚さ**，

$$\tau = \int_{t_1}^{t_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_1 a(t_1)}{k_{\mathcal{B}}T(t)a(t)}\right)\right] \Lambda(\nu_1 a(t_1)/a(t), t)\, dt \tag{1.10.3}$$

と呼ばれる．

---

*1 A. Einstein, *Phys. Z.*, **18**, 121 (1917).

吸収率は以下の式で与えられ，

$$\Lambda(\nu,t) = n(t)\,\sigma(\nu), \tag{1.10.4}$$

ここで $\sigma(\nu)$ は周波数 ν における吸収断面積，$n(t)$ は吸収を行う原子の（固有体積あたりの）数密度である．多くの場合，吸収断面積はある周波数 ν_R で鋭いピークを持つので，吸収は対応する時刻 t_R に近いときのみに起こる．t_R は以下の式で与えられる．

$$a(t_R) = \nu_1 a(t_1)/\nu_R. \tag{1.10.5}$$

したがって，光学的厚さは以下のように近似できる．

$$\tau \simeq n(t_R)\left[1 - \exp\Big(-h\nu_R/k_{\mathcal{B}}T(t_R)\Big)\right]\int \sigma\Big(\nu_1 a(t_1)/a(t)\Big)\,dt.$$

この式において，積分変数を時間から周波数に書き換えれば，

$$\tau \simeq n(t_R)\left[1 - \exp\Big(-h\nu_R/k_{\mathcal{B}}T(t_R)\Big)\right][a(t_R)/\dot{a}(t_R)]\,\mathcal{I}_R \tag{1.10.6}$$

を得る．ここで，

$$\mathcal{I}_R \equiv \frac{1}{\nu_R}\int \sigma(\nu)\,d\nu \tag{1.10.7}$$

で，積分は吸収線を含む狭い周波数領域に渡って行う．この τ の公式の中で唯一宇宙論モデルに依存するのは，吸収の時刻における宇宙膨張率 $\dot{a}(t_R)/a(t_R)$ であり，式（1.5.19）と式（1.5.38）で以下のように与えられる．

$$\frac{\dot{a}(t_R)}{a(t_R)} = H_0\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z_R)^2 + \Omega_M(1+z_R)^3 + \Omega_R(1+z_R)^4}, \tag{1.10.8}$$

ここで $z_R = a(t_0)/a(t_R) - 1 = \nu_R/\nu_0 - 1$ は共鳴吸収の起こる赤方偏移である．赤方偏移 z にある光源に対し，吸収は**観測される**周波数 $\nu_0 = \nu_1/(1+z)$ のうちある決まった領域に渡って起こり，その領域は，式（1.10.5）で与えられる時刻 t_R が t_1 と t_0 の間にあるという条件から求まる．

$$\nu_R/(1+z) \leqq \nu_0 \leqq \nu_R. \tag{1.10.9}$$

たとえば，1959 年にフィールド*2は，水素原子の 21 cm 遷移による電波の吸収の効果を観測することを提案した．このスペクトル線は，銀河間水素の 1s 状態における超微細構造がスピン 0 からスピン 1 に遷移する際に生じる．この場

*2 G. Field, *Astrophys. J.*, **129**, 525 (1959).

合 $\nu_R = 1420$ MHz であるから，赤方偏移 $z = 0.056$ にある銀河，はくちょう座 A の電波スペクトルは 1342 MHz から 1420 MHz の間に式（1.10.9）で与えられる吸収線の谷を示すはずである．残念ながら，銀河間空間の中性水素の温度は $h\nu_R/k_{\mathcal{B}} = 0.068$ K よりもはるかに大きいため，式（1.10.9）で与えられる光学的厚さは $\simeq 0.068$ K$/T(t_R)$ の分だけ小さくなってしまう．この吸収線の谷の兆候は未だ発見されていない．将来，高角度分解能を持つ新世代の低周波電波望遠鏡を用いることで，高赤方偏移における 21 cm 放射の輝線と吸収線を観測し，構造の進化，および構造の種となった原始密度ゆらぎを研究できると期待されている*3．たとえば 2010 年までには，低周波干渉計（LOFAR，LOw Frequency ARray）によって，赤方偏移 5 から 15 の間にある光源からの 21 cm 放射を高感度，高角度分解能で研究できるはずである*4．

現在のところ銀河間水素原子の性質は，1s 基底状態から 2p 励起状態への遷移であるライマン・アルファ遷移の光子の吸収によって詳しく調べられており，**ガン–ピーターーソン効果**として知られている*5．この遷移は紫外線領域に共鳴周波数 $\nu_R = 2.47 \times 10^{15}$ Hz を持ち，それは波長 1215 Å に対応する．しかし，赤方偏移が $z > 1.5$ にある光源に対しては，式（1.10.9）で与えられる吸収線の谷の低周波極限が波長 3000 Å よりも長波長となり，可視光や赤外線部分のスペクトルを用いて地上から観測できる．ライマン・アルファ線は $h\nu_R/k_{\mathcal{B}} = 118000$ K であり，これはたいていの場合，銀河間ガスの温度よりも高い．したがって，式（1.10.6）における因子 $1 - \exp\Big(-h\nu_R/k_{\mathcal{B}}T(t_R)\Big)$ は 1 にして良い．式（1.10.7）の積分は 4.5×10^{-18} cm^2 の値を持つから，式（1.10.6）より，式（1.10.9）で与えられる吸収線の谷の低周波極限のすぐ上の周波数における光学的厚さは，

$$\tau_{\nu_0=\nu_R/(1+z)+} = \left(\frac{n(t_R)}{2.4\,h\ \times 10^{-11}\ \mathrm{cm}^{-3}}\right)\Big(\Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^4\Big)^{-1/2} \qquad (1.10.10)$$

で与えられ，h は 100 km s^{-1} Mpc^{-1} を単位とするハッブル定数である．たとえ

*3 A. Loeb, M. Zaldarriaga, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 211301 (2004) [astro-ph/0312134]; S. Furlanetto, S. P. Oh, F. Briggs, *Phys. Rep.*, **433**, 181 (2006) [astro-ph/0608032].

*4 H. J. A. Röttgering *et al.*, in *Cosmology, Galaxy Formation, and Astroparticle Physics on the Pathway to the SKA*, eds., H.-R. Klöckner *et al.* [astro-ph/0610596].

*5 J. E. Gunn, B. A. Peterson, *Astrophys. J.*, **142**, 1633 (1965). また，I. S. Shklovsky, *Astron. Zh.*, **41**, 408 (1964); P. A. G. Scheuer, *Nature*, **207**, 963 (1965) も見よ．

ば，もし $z=5$ に対応する時刻において，宇宙のバリオンのうち f の割合が銀河間中性水素原子であったとすれば，$\Omega_B h^2 = 0.02$ のとき，$z=5$ における水素原子の数密度は $4.8\,f \times 10^{-5}\ \mathrm{cm}^{-3}$ である．宇宙論パラメータとして $h=0.65$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_K = \Omega_R = 0$ を選べば，式（1.10.10）で与えられる光学的厚さは $3.8\,f \times 10^5$ となる．したがって，これらのパラメータに対しては，宇宙のバリオン物質の量に対する比が $f \gg 2.6 \times 10^{-6}$ である銀河間中性水素は，$z=5$ を超える光源からの赤方偏移を受けたライマン・アルファ線より高い周波数を持ついかなる光も完全に吸収してしまうことがわかる．

長年に渡り，ライマン・アルファ吸収線の谷の探索は失敗に終わっていた．クエーサーのスペクトルは膨大な数のライマン・アルファ吸収線を示していたが，それらは通常「ライマン・アルファの森」と呼ばれ，視線方向に存在する中性水素の雲から生じていると考えられている．しかし，$z \approx 5$ までにあるクエーサーのスペクトルには上述のような兆候，すなわち，たとえ宇宙のバリオンのごくわずかな割合 f だけでも銀河間中性水素原子であったとすれば，赤方偏移を受けたライマン・アルファ線より高周波側に見られるであろう一様な光の減衰，は発見されなかった*6．2001 年になり，スローン・デジタル・スカイサーベイによって発見された赤方偏移 $z=6.28$ のクエーサー SDSSp J103027.10+052455.0 のスペクトル中に，赤方偏移を受けたライマン・アルファ線の波長 8845 Å よりすぐ短波長側から 8450 Å にかけて，完全な光の減衰の兆候が見つかった*7（図 1.8（84 ページ）に示す）．これは，赤方偏移が $8450/1215 - 1 = 5.95$ より大きいところでは，無視できない割合 f のバリオンが銀河間中性水素原子の状態にあることを示している．したがって，赤方偏移が 6 あたりで「暗黒時代」が終わったのかもしれない．暗黒時代の宇宙空間は中性水素原子による光の吸収のため，赤方偏移を受けたライマン・アルファ線の周波数より高周波の光に対して不透明なのである．この結論に対するさらなる証拠が，高赤方偏移で生じた**ガンマ線バースト**として知られる強烈なガンマ線光源のスペクトルから得られている*8．

この観測結果だけでは，$z>6$ の宇宙におけるすべての水素はおろか，そのほ

---

*6 A. Songalia, E. Hu, L. Cowie, R. McMahon, *Astrophys. J.*, **525**, L5 (1999).

*7 R. H. Becker *et al.*, *Astron. J.*, **122**, 2850 (2001) [astro-ph/0108097]. 少し小さい赤方偏移の中性水素による吸収のヒントは，S. G. Djorgovski *et al.*, *Astrophys. J.*, **560**, L5 (2001) [astro-ph/0108069] を見よ．また，X. Fan *et al.*, *Astrophys. J.*, **123**, 1247 (2002) [astro-ph/0111184] も見よ．

*8 T. Totani *et al.*, *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **58**, 485 (2006) [astro-ph/0512154].

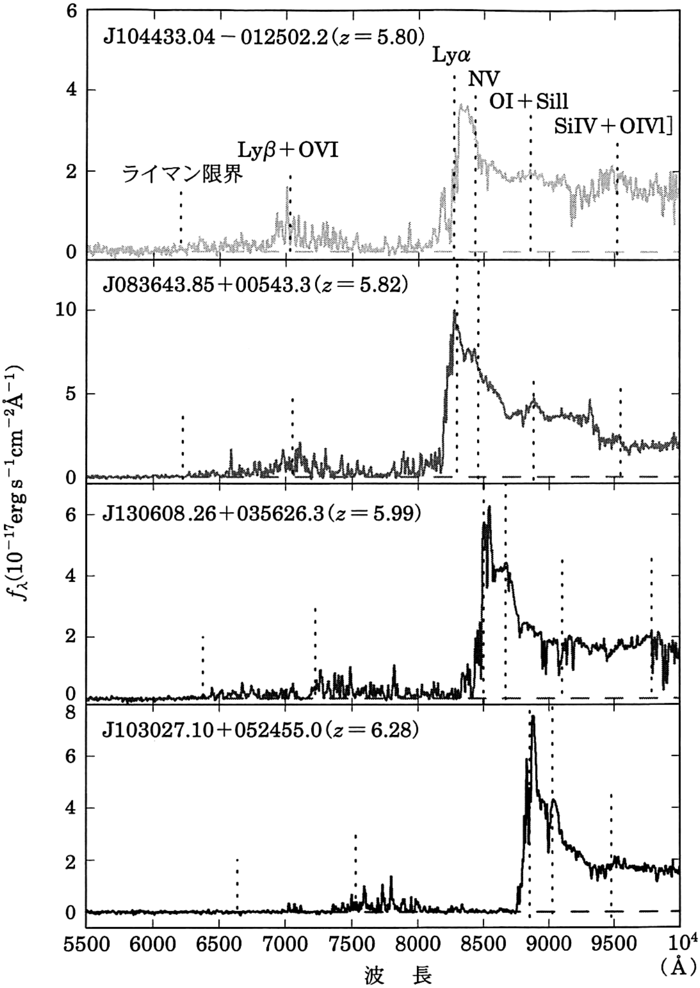


図 1.8　高赤方偏移にある 4 つのクエーサーから観測された光の強度を波長に対して示す．R. H. Becker *et al.*, *Astron. J.* **122**, 2850 (2001) [astro-ph/0108097] より抜粋．垂直な破線は赤方偏移を受けた様々なスペクトル線の波長を示す．$z=6.28$ のクエーサーの方向では，8845 Å にあるライマン・アルファ線のすぐ左で光の強度が実験の精度の範囲内でゼロまで落ちている．これは $z=5.99$ のクエーサーには見られない現象であり，ほぼ完全に電離している領域が赤方偏移 5.99 と 6.28 の間で現れたことを示している．

とんどが中性原子だということすらできない．すでに見たように，ほんのわずかの中性水素の集中があっただけでも，遠方クエーサーのスペクトルに吸収線の谷ができるのである．実際，現在では，7 章で見るように宇宙マイクロ波背景放射の研究から水素は $z \approx 6$ よりもっと大きな赤方偏移，おそらく $z \approx 10$ のあたりですでにほとんど電離しているという証拠があがっている．

ライマン・アルファの森を形成している，赤方偏移 $z < 6$ にある中性水素の雲を使えば，他の手法とは独立に Ω_M と Ω_Λ を決めることができる．このアイデアはアルコックとパチンスキーによる 1979 年の論文にまで遡る[*9]．ある赤方偏移 z にある，広がった光源を観測するとしよう．その広がりは，視線方向と垂直な方向に固有距離で $D_\perp$，視線方向と平行な方向に固有距離で $D_{/\!/}$ とする．角径距離の定義より，この天体は以下の角度を見込む．

$$\Delta\theta = D_\perp / d_A(z). \tag{1.10.11}$$

また，この天体全体からの光を同時刻 t_0 で観測する際，この天体の奥側と手前側から光が放射された時刻 t_1 の差は $\Delta t_1 = D_{/\!/}$ となる．赤方偏移は $a(t_0)/a(t_1) - 1$ であるから，この天体の奥側と手前側の赤方偏移の差の絶対値は，

$$\Delta z = \frac{a(t_0)}{a^2(t_1)}\dot{a}(t_1)\Delta t_1 = (1+z)H(z)D_{/\!/} \tag{1.10.12}$$

で与えられ，$H(z) \equiv \dot{a}(t_1)/a(t_1)$ は光が放射された時刻でのハッブル定数である．これらの比を取れば以下の式を得る．

$$\frac{\Delta z}{\Delta\theta} = (1+z)\,H(z)\,d_A(z)\Big(D_{/\!/}/D_\perp\Big). \tag{1.10.13}$$

あとは式（1.5.19）を用いて $H(z)$ を以下のように書き下し，

$$H(z) = \sqrt{\left(\frac{8\pi G}{3}\right)\left(\rho_{M0}(1+z)^3 + \rho_V + \rho_{R0}(1+z)^4\right) - \frac{K}{a_0^2}(1+z)^2}$$

$$= H_0\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_R(1+z)^4 + \Omega_K(1+z)^2}, \tag{1.10.14}$$

式（1.4.12）と式（1.5.45）を用いて $d_A(z)$ を以下のように書き下せば良い．

$$d_A(z) = \frac{1}{(1+z)H_0\Omega_K^{1/2}}$$

---

*9 C. Alcock, B. Paczyński, *Nature*, **281**, 358 (1979).

$$\times \sinh\left[\Omega_K^{1/2}\int_{1/(1+z)}^{1}\frac{dx}{x^2\sqrt{\Omega_\Lambda+\Omega_K x^{-2}+\Omega_M x^{-3}+\Omega_R x^{-4}}}\right]. \tag{1.10.15}$$

ハッブル定数 H_0 は $H(z)$ と $d_A(z)$ の積において相殺するから，結果は z, $D_{/\!/}/D_\perp$，そして 4 つの Ω にのみ依存する．

$$\frac{\Delta z}{\Delta\theta} = \left(D_{/\!/}/D_\perp\right)\Omega_K^{-1/2}\sqrt{\Omega_M(1+z)^3+\Omega_\Lambda+\Omega_R(1+z)^4+\Omega_K(1+z)^2}$$
$$\times \sinh\left[\Omega_K^{1/2}\int_{1/(1+z)}^{1}\frac{dx}{x^2\sqrt{\Omega_\Lambda+\Omega_K x^{-2}+\Omega_M x^{-3}+\Omega_R x^{-4}}}\right]. \tag{1.10.16}$$

たとえば，もしこの天体が球対称の銀河団のように球であるとわかっていたならば，$D_{/\!/}/D_\perp = 1$ である．このとき Δz と $\Delta\theta$ の測定を用いて，銀河間物質の進化や銀河間吸収の効果を気にすることなしに，様々な Ω に対してモデルによらない制限を与えることができる．

残念ながら，高赤方偏移において球対称の天体を見つけるのは容易ではない．しかし，その**分布が球対称**である天体は様々なものがある．たとえば，散在銀河の分布は空間のあらゆる点に関して球対称だろうから，アルコック–パチンスキーの手法を銀河に応用することで宇宙定数を決めることができるかもしれない[*10]．この手法は，銀河の代わりに 2 度視野クエーサー赤方偏移サーベイ（2dF QSO Redshift Survey）[*11]で測定されたクエーサーの分布に応用された[*12]．$K=0$ を仮定すると，この解析から $\Omega_\Lambda = 0.71^{+0.09}_{-0.17}$ が得られる．

最近になり，アルコック–パチンスキーのアイデアはライマン・アルファ雲の分布関数にも適用された[*13]．すでに述べたように，これらは銀河間に存在する中性水素原子を含む雲であり，視線方向にある遠方のクエーサーからの光を 1s → 2p の遷移によって吸収する．雲が赤方偏移 z にある場合，この吸収線はクエーサーのスペクトルに波長 1215 $(1+z)$ Å の暗線として現れる．

---

*10 W. E. Ballinger, J. A. Peacock, A. F. Heavens, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **281**, 877 (1996).

*11 S. M. Croom *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **349**, 1397 (2004); データは，www.2dquasar.org から取得可能．

*12 P. J. Outram *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **348**, 745 (2004) [astro-ph/0310873].

*13 L. Hui, A. Stebbins, S. Burles, *Astrophys. J.*, **511**, L5 (1999); P. McDonald, J. Miralda-Escudeé, *Astrophys. J.*, **518**, 24 (1999); W-C. Lin, M. L. Norman, talk at the Theoretical Astrophysics in Southern California meeting, Santa Barbara, October 2002 [astro-ph/0211177]; P. McDonald, *Astrophys. J.*, **585**, 34 (2003).

さて，様々な方向 $\hat{n}$ と様々な赤方偏移 z にあるライマン・アルファ雲の数密度 $N(z,\hat{n})$ を測定することを考えよう．ライマン・アルファ雲の分布が球対称であると仮定すれば，赤方偏移 z と $z+\Delta z$（ただし $\Delta z \ll 1$），および方向 $\hat{n}$ と $\hat{n}+\Delta\hat{n}$（ただしその方向間の角度 $\Delta\theta$ は小さい）を持つような，互いに近い 2 点における雲の数密度の積の平均値は z と 2 点間の固有距離のみの関数であり，これら 2 点間を結ぶベクトルの成分に関して解析的となる．したがって，2 点間の距離が小さい場合には，

$$\langle N(z,\hat{n})\,N(z+\Delta z,\hat{n}+\Delta\hat{n})\rangle \simeq \langle N^2(z,\hat{n})\rangle\left[1-\frac{D_\perp^2+D_{/\!/}^2}{L^2(z)}\right] \qquad (1.10.17)$$

のように書け，$D_\perp$ と $D_{/\!/}$ はそれぞれ式（1.10.11）と式（1.10.12）で与えられ，L は 2 点間が相関を持つ特徴的な長さ（相関長）である．これは観測量 Δz，$\Delta\theta$ を用いて以下のように書け，

$$\langle N(z,\hat{n})\,N(z+\Delta z,\hat{n}+\Delta\hat{n})\rangle \simeq \langle N^2(z,\hat{n})\rangle\left[1-\frac{\Delta z^2}{L_z^2(z)}-\frac{\Delta\theta^2}{L_\theta^2(z)}\right], \qquad (1.10.18)$$

L_z と L_θ は，それぞれ以下の式で与えられる赤方偏移と角度の相関長である．

$$L_\theta(z)=\frac{L(z)}{d_A(z)}, \qquad L_z(z)=L(z)(1+z)H(z). \qquad (1.10.19)$$

この積を様々な赤方偏移と方向に対して測定することにより，L とは独立に相関長の比の値を推定できる．

$$\frac{L_z(z)}{L_\theta(z)}=\Omega_K^{-1/2}\sqrt{\Omega_M(1+z)^3+\Omega_\Lambda+\Omega_R(1+z)^4+\Omega_K(1+z)^2}$$
$$\times\sinh\left[\Omega_K^{1/2}\int_{1/(1+z)}^{1}\frac{dx}{x^2\sqrt{\Omega_\Lambda+\Omega_K x^{-2}+\Omega_M x^{-3}+\Omega_R x^{-4}}}\right]. \qquad (1.10.20)$$

この手法は，赤方偏移が 2.5 から 3.5 の間かつ，見かけの角度が 33 から 180 秒角の間にある 5 つの互いに近いクエーサー対に応用された[*14]．この制限されたサンプルでは様々な Ω に対して弱い制限しか得られていないが，$\Omega_\Lambda=0$ は標準偏差 2 つ分の確度で棄却している．

[*14] A. Lidz, L. Hui, A. P. S. Crotts, M. Zaldarriaga [astro-ph/0309204]（未出版）．

1.11 計数

通常のユークリッド空間に一様に分布し，かつその絶対光度分布が滑らかだとすれば，そのような光源の見かけの光度分布は一意に決まる．絶対光度が L から $L+dL$ の間にある光源の単位体積あたりの個数が $N(L)dL$ とすれば，見かけの光度が ℓ よりも大きく観測される光源の個数は，

$$\begin{aligned} n\,(>\ell) &= \int_0^\infty N(L)\,dL \int_0^{\sqrt{L/4\pi\ell}} 4\pi r^2\,dr \\ &= \frac{1}{3\sqrt{4\pi}\,\ell^{3/2}} \int_0^\infty L^{3/2}\,N(L)\,dL \end{aligned} \tag{1.11.1}$$

で与えられ，したがって，どのような絶対光度分布に対しても $n\,(>\ell) \propto \ell^{-3/2}$ となる．

この議論は，宇宙論的状況ではいくつか変更が必要である．

(1) ユークリッド空間における体積要素 $r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$ の代わりに，固有体積要素 $(\mathrm{Det}\,g^{(3)})^{1/2}dr\,d\theta\,d\phi$ を使う．ここで $g^{(3)}_{ij} \equiv a^2\tilde{g}_{ij}$ は 3 次元計量で，ゼロでない成分は $g^{(3)}_{rr} = a^2/(1-Kr^2)$，$g^{(3)}_{\theta\theta} = a^2r^2$，$g^{(3)}_{\phi\phi} = a^2r^2\sin^2\theta$ であるから，固有体積要素は，

$$dV = \frac{a^3(t)\,r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi}{\sqrt{1-Kr^2}}. \tag{1.11.2}$$

(2) 見かけの光度と絶対光度の関係は，

$$\ell = \frac{L}{4\pi d_L^2(z)} \tag{1.11.3}$$

で，$d_L(z)$ は式 (1.4.3) で与えられる光度距離である．

(3) 定常宇宙論の場合を除き光源の数密度は，最低でも宇宙膨張の効果により，時間とともに変化する．

(4) たいていの場合，見かけの光度のみならず赤方偏移 z も測定可能である．

式 (1.11.2) は，赤方偏移が z と $z+dz$ の間にあり，見かけの光度が ℓ と $\ell+d\ell$ の間にある光源の個数を以下のように与える．

$$n(z,\ell)\,dz\,d\ell = 4\pi\mathcal{N}(t,L)dL\,\frac{a^3(t)\,r^2\,dr}{\sqrt{1-Kr^2}}, \tag{1.11.4}$$

ここで $\mathcal{N}(t,L)\,dL$ は，時刻 t において絶対光度が L と $L+dL$ の間にある光源の，固有体積あたりの個数である．t と z は $1+z=a(t_0)/a(t)$ で結ばれ，t と r は式（1.2.2）で結ばれる．

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-Kr'^2}}. \tag{1.11.5}$$

式（1.11.5）を用いて dr を dt で書き，それから dt を dz で書けば，

$$\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = -\frac{dt}{a(t)} = \frac{dz}{H(z)\,a_0},$$

ここで $H(z) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ で，$a_0 \equiv a(t_0)$ である．放射，物質，定数の真空エネルギーを持つ宇宙では，式（1.5.41）より以下が成り立つことを思い出そう．

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^4}.$$

これらを用いて式（1.11.4）の dr を dz で書き，両辺から dz を消去すれば，

$$n(z,\ell)\,d\ell = \frac{4\,\pi\,\mathcal{N}\Big(t(z),L\Big)\,r^2(z)a_0^2\,dL}{(1+z)^3\,H(z)}$$

を得る．次に，式（1.11.3）から（ただし z は固定する），

$$dL = 4\pi d_L^2(z)\,d\ell$$

が得られ，これを用いて両辺から $d\ell$ も消去することで以下の結果を得る．

$$n(z,\ell) = \frac{16\,\pi^2\,\mathcal{N}\Big(t(z),4\pi d_L^2(z)\ell\Big)\,d_L^4(z)}{H(z)\,(1+z)^5}, \tag{1.11.6}$$

ただし，式（1.4.3）を用いて $a_0 r$ を d_L に書き換えた．

特殊なケースとして，時間 $t(z)$ に応じて進化しない光源を考えよう．このとき，数密度 $\mathcal{N}$ の時間依存性は単に $a^{-3} \propto (1+z)^3$ に比例する．

$$\mathcal{N}\Big(t(z),L\Big) = (1+z)^3\mathcal{N}_0(L). \tag{1.11.7}$$

もしこの光源が赤方偏移 z で観測できるほど明るければ，赤方偏移が z と $z+dz$ の間で観測できる光源の個数 $n(z)\,dz$ は，

$$n(z) \equiv \int_0^\infty n(z,\ell)\,d\ell = \frac{4\,\pi\,\mathcal{N}_0\,d_L^2(z)}{H(z)\,(1+z)^2} \tag{1.11.8}$$

で与えられ，$d_L(z)$ は式（1.5.45），そして $\mathcal{N}_0$ は，

$$\mathcal{N}_0 \equiv \int_0^\infty \mathcal{N}_0(L)\,dL \tag{1.11.9}$$

で定義される．原理的には，$n(z)$ が正確に測定できれば，$\mathcal{N}_0$ や H_0 がわからなくても $n(z)$ の**関数形**と式（1.11.8）を比べることで様々な Ω を求めることができる．

しかし，このようにして式（1.11.8）をそのまま用いるのは，いくつかの理由から危険である．一つには，高赤方偏移にある光源の見かけの光度が小さいため，そのような光源の観測数が見かけ上減少する効果に気をつける必要がある．また，光源の個数が時間とともに変化すれば，光が放射された時刻 t，したがって z に新たな依存性が生じる．1986 年，ローとスピラー[*1]により，銀河の個数が様々な赤方偏移に対して測定された．赤方偏移は測光観測（つまり，スペクトル線のシフトではなく，様々な色における光度）を用いて求められた．測光観測で求められた赤方偏移は一般的にいって精度が低い．彼らは，得られた結果を式（1.11.8）と比較し，$\Omega_K = \Omega_R = 0$（つまり $\Omega_\Lambda + \Omega_M = 1$）を仮定することで，$\Omega_\Lambda/\Omega_M = 0.1^{-0.4}_{+0.2}$ を得た．今では，$n(z)$ が宇宙論パラメータに依存するような高赤方偏移では銀河の進化が無視できないことがわかっており，この Ω_Λ/Ω_M への制限は棄却されている[*2]．

銀河進化を考慮すれば，有益な結果を得ることができる．あるグループ[*3]は，非常に暗い銀河の計数[*4]を見かけの光度の関数として調べることで，（単位座標体積あたりの銀河数が一定であるという仮定のもとで）銀河の光度進化のモデルの自由パラメータを推定し，このモデルを $z \simeq 0.47$ に渡る赤方偏移サーベイ観測のデータ[*5]と合わせることによって，Ω_M は小さく，Ω_Λ は 0.5 から 1 の間にあると結論した．より最近になり，様々な赤方偏移における銀河計数のサーベイ観測がいくつか行われ[*6]，銀河進化に関して重要な結果が得られた．これと宇宙の動力学的なモデルを合わせれば，Ω_M と Ω_Λ に関する情報が得られる[*7]．しかし銀河の計数は，宇宙論パラメータの精密決定というよりは，銀河進化に関する知見

[*1] E. D. Loh, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 2865 (1986); E. D. Loh, E. J. Spillar, *Astrophys. J.*, **284**, 439 (1986).

[*2] 赤方偏移のサーベイ観測を用いて Ω_Λ を測定する将来的な可能性に関する議論は，W. E. Ballinger, J. A. Peacock, A. F. Heavens, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **282**, 877 (1996).

[*3] M. Fukugita, F. Takahara, K. Yamashita, Y. Yoshii, *Astrophys. J.*, **361**, L1 (1990).

[*4] J. A. Tyson, *Astron. J.*, **96**, 1 (1988).

[*5] T. J. Broadhurst, R. S. Ellis, T. Shanks, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **235**, 827 (1988).

を得るのにより有用であるようだ．この手法の目ざましい応用[*8]に，リック天文台による，赤方偏移 $z \approx 7$ から 8 の銀河の探査がある．この観測で一つの銀河が見つかった．一方，赤方偏移 $z \approx 6$ で見つかった銀河の個数を，式（1.11.7）が正しいと仮定して外挿すれば，$z \approx 7$ から 8 では 10 個の銀河が見つかるべきだと推定される．しかし実際には一つしか見つからなかったのだから，これより，赤方偏移が 6 から 7 の間で明るい銀河が急激に形成されたはずだという結論が得られる．これは，1.10 節で議論した，おそらくはその時期に形成された質量の重い星の紫外光により，銀河間水素の電離が赤方偏移が 6 あたりで完了したという結論と符号している．

* * *

歴史的に重要な銀河計数の最初の応用として，電波源のサーベイ観測がある．一般的に電波源のサーベイ観測では赤方偏移は不明だが，観測周波数 ν が固定されるため，それに対応する光が放射されたときの周波数 $\nu(1+z)$ は赤方偏移に応じて変化する．したがって電波源の計数は，光源本来が持つ電波強度分布の周波数依存性によって影響を受ける．

もし赤方偏移 z を持つ光源が強度[*9]$P(\nu)d\nu$ の光を周波数 ν から $\nu + d\nu$ の間に放射したとすれば，原点においてアンテナの単位面積あたりに受け取る光の強度は，周波数 ν から $\nu + d\nu$ の間において以下のように与えられる．

$$S(\nu)d\nu = \frac{P\Big(\nu(1+z)\Big)\,d\nu\,(1+z)}{4\pi d_L^2(z)}. \qquad (1.11.10)$$

多くの電波源は「直線」スペクトル，すなわち，

---

*6 （90 ページ）G. Efstathiou, R. S. Ellis, B. A. Peterson, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **232**, 431 (1988); J. Loveday, B. A. Peterson, G. Efstathiou, S. J. Maddox, *Astrophys. J.*, **390**, 338 (1992); L. da Costa, in *Proceedings of the Conference on Evolution of Large Scale Structure*, Garching, (1998) [astro-ph/9812258]; S. Borgani, P. Rosati, P. Tozzi, C. Norman, *Astrophys. J.*, **517**, 40 (1999) [astro-ph/9901017]; S. J. Oliver, in *Highlights of the ISO Mission: Special Scientific Session of the IAU General Assembly.*, eds., D. Lemke *et al.*, Kluwer [astro-ph/9901272]; M. Colless, in *Publ. Astron. Soc.* [astro-ph/9911326]; S. Rawlings [astro-ph/0008067].

*7 （90 ページ）W. J. Percival *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **327**, 1297 (2001) [astro-ph/0105252]; S. Borgani *et al.*, *Astrophys. J.*, **561**, 13 (2001) [astro-ph/0106428].

*8 R. J. Bouwens, G. D. Illingworth, *Nature*, **443**, 189 (2006).

*9 G&C では P は単位立体角あたりの放射強度として定義したが，ここでは全方位に放射される強度とする．

$$P(\nu) \propto \nu^{-\alpha} \tag{1.11.11}$$

を持ち，そのスペクトル指数 α は典型的に 0.7 から 0.8 の値をとる．このとき，式（1.11.10）は単純化できる．

$$S(\nu)d\nu = \frac{P(\nu)\,d\nu}{4\pi\,d_L^2(z)(1+z)^{\alpha-1}}. \tag{1.11.12}$$

以下では観測周波数を ν に固定し，$S(\nu)=S$，$P(\nu)=P$ と書くことにする．両辺を $d\nu$ で割れば，式（1.11.12）は，

$$S = \frac{P}{4\pi\,d_L^2(z)\,(1+z)^{\alpha-1}} \tag{1.11.13}$$

となる．

時刻 t において，その強度が P から $P+dP$ の間にある光源の単位固有体積あたりの個数が $N(P,t)\,dP$ であるとしよう．アンテナの単位面積あたりに受け取る強度が S よりも大きい光源の個数は，

$$n\,(>S) = \int_0^\infty dP \int N(P,t)\,\frac{4\pi r^2 a^3(t)\,dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \tag{1.11.14}$$

で与えられ，r に関する積分の上限値は，

$$a_0^2\,r^2\,(1+z)^{1+\alpha} < \frac{P}{4\pi\,S} \tag{1.11.15}$$

という条件で与えられる．もちろん，r，z，t はいつもの公式で結びついており，

$$\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-Kr'^2}} = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \qquad 1+z = a(t_0)/a(t) \tag{1.11.16}$$

である．

もし光源の数密度の時間依存性が，

$$N(P,t) = N(P)\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^\beta \tag{1.11.17}$$

で与えられると仮定すれば，結果をさらに単純化できる．たとえば光源が，生成されることもなければ破壊されることもなく，まったく進化していない場合には $\beta=-3$ であり，定常宇宙モデルでは $\beta=0$ である．この仮定のもとでは式（1.11.14）は，

$$n\,(>S) = a_0^3 \int_0^\infty N(P)\,dP \int \frac{4\pi r^2(1+z)^{-\beta-3}\,dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \tag{1.11.18}$$

となり，r に関する積分の上限値は式（1.11.15）で与えられるように P と S に依存する．

座標 r は，式（1.4.8）のように z に関する冪展開で書ける．

$$a_0 H_0\, r = z - \frac{1}{2}(1+q_0)z^2 + \cdots . \tag{1.11.19}$$

これを用いて r に関する積分を z に関するものに書き換える．dr と dz の関係は，

$$a_0 H_0\, dr = dz\,[1-(1+q_0)z+\cdots] \tag{1.11.20}$$

で，z の上限値は，

$$z^2\,[1+z(\alpha-q_0)+\cdots] < \frac{PH_0^2}{4\pi S}$$

つまり，

$$z < \sqrt{\frac{PH_0^2}{4\pi S}}\left[1-\frac{1}{2}(\alpha-q_0)\sqrt{\frac{PH_0^2}{4\pi S}}+\cdots\right] \tag{1.11.21}$$

となる．これらを用いて式（1.11.18）を以下のように書き換える．

$$\begin{aligned} n\,(>S) = \frac{4\pi}{H_0^3}\int_0^\infty N(P)\,dP \\ \times\left[\frac{1}{3}\left(\frac{PH_0^2}{4\pi S}\right)^{3/2}\left(1-\frac{3}{2}(\alpha-q_0)\left(\frac{PH_0^2}{4\pi S}\right)^{1/2}+\cdots\right)\right. \\ \left. -\frac{1}{4}\left(\frac{PH_0^2}{4\pi S}\right)^2(\beta+5+2q_0)+\cdots\right], \end{aligned}$$

もしくは，項を集めて書き換えれば，

$$\begin{aligned} n\,(>S) = \frac{1}{3\sqrt{4\pi}\,S^{3/2}}\int_0^\infty P^{3/2}N(P)\,dP \\ \times\left[1-\frac{3}{4}\Big(5+\beta+2\alpha\Big)\left(\frac{PH_0^2}{4\pi S}\right)^{1/2}+\cdots\right] \end{aligned} \tag{1.11.22}$$

となる．

$n\,(>S)$ はいつもの $S^{-3/2}$ 依存性に加え S^{-2} に比例する補正項を持ち，その係数は $5+\beta+2\alpha$ である．この係数が q_0 や K に依存しないのは特筆すべきこと

である．すでに述べたように観測から $\alpha \approx 0.75$ が得られているから，通常の宇宙モデルにおいて光源が進化しない場合，つまり $\beta = -3$ の場合には，$5 + \beta + 2\alpha = 3.5$ である．正確な値は不定であるが，この係数は確実に正であり，それはつまり光源が暗いほど $n\ (> S)$ の減少の仕方が $S^{-3/2}$ に比べて**ゆっくりしている**ことを意味する．これは観測事実と矛盾する*10．長年に渡り，$S > 5 \times 10^{-26}\mathrm{Wm}^{-2}/\mathrm{Hz}$ を持つ電波源の計数 $N\ (> S)$ は $S^{-3/2}$ よりも速く減少することが知られている．電波源の単位共動体積[訳注 1]あたりの個数が $\beta < -6.5$ に対応する速さで減少しているのは，必然的結論なのである．電波源の計数は電波源の進化を研究するには有用だが，宇宙論パラメータを測定するには適さない．

一方，（1.5 節で議論した）定常宇宙モデルでは $\beta = 0$ であるから，係数は $5 + \beta + 2\alpha \approx 6.5$ となり，したがってこのモデルで予言される $N\ (> S)$ は，S が増えるにしたがってよりゆっくりと減少する．つまり，通常の宇宙論において進化しない光源を考えた場合よりも，観測との不整合が大きいのである．この状況を電波源の進化を加えて改善することはできない．なぜなら，平均的に見て進化がないことこそが定常宇宙モデルの本質だからである．この観測のため，定常宇宙モデルは，宇宙マイクロ波背景放射の発見より以前にその正当性が疑われていたのである．

1.12　クインテッセンス

これまでは宇宙の膨張率を計算する際，非相対論的物質，放射，そして定数の真空エネルギーのみを考慮してきた．真空エネルギーの密度は，量子場の理論に基づいて見積もった値に比べ桁違いに小さいだけでなく，現在の物質密度に比べ2，3 倍程度大きいくらいである．この事実は，真空のエネルギーが実は定数ではないのではないか，という憶測を呼ぶこととなった．現在真空のエネルギーが小さいのは宇宙が古いからだ，というのである．時間変動する真空のエネルギーは，しばしば「クインテッセンス」と呼ばれている*1．

変動する真空エネルギーを導入する上で自然な方法は，一つ，あるいは複数の

---

*10 主な電波源のサーベイ観測，およびもとの文献のリストは G&C の 14.8 節を見よ．

訳注 1 共動体積は，宇宙膨張とともに $a^3(t)$ に比例して増大する体積のこと．生成も破壊もされない粒子の数密度を $n(t)$ とすると，共動体積中の粒子数 $n(t)a^3(t)$ は一定となる．

*1 レビュー，およびもとの文献への参照は，B. Ratra, P. J. E. Peebles, *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 559 (2003); E. V. Linder, arXiv: 0704.2064.

スカラー場の存在を仮定することである．真空のエネルギーはそれらのスカラー場の値に依存し，スカラー場自身の期待値も時間とともに変化する．この種のスカラー場は，現代の弱い相互作用と電磁相互作用の理論で重要な役割を果たし，4 章と 10 章で議論するインフレーションの理論にも導入されている．

単純化のため，実数のスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ を一つ考えよう．ここでは，素粒子の時空サイズではほとんど変化しない場を考えるので，場の作用は時空に関する微分の数が最小になるようにとる．

$$I_\varphi = -\int d^4x\,\sqrt{-\mathrm{Det}g}\left[\frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\kappa} + V(\varphi)\right]. \tag{1.12.1}$$

そして，ポテンシャルを表す関数 $V(\varphi)$ の形は決めないでおく．ここではロバートソン–ウォーカー計量の場合を考え，さらにスカラー場は場所に依存せず，時間のみに依存するとする．この場合，公式（B.66）と（B.67）で与えられるスカラー場のエネルギー密度と圧力は以下のように書ける．

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \tag{1.12.2}$$

$$p_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \tag{1.12.3}$$

これより直ちに $w \equiv p_\varphi/\rho_\varphi$ に対して $(1+w)\rho_\varphi \geqq 0$ が導かれ，したがって，$\rho_\varphi \geqq 0$ である限りこのモデルは $w \geqq -1$ を持つ．1.6 節で議論したファントムエネルギーによる悲劇は，このモデルでは生じない．

エネルギー保存則の式（1.1.32）は，ここでは以下のように書ける．

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0. \tag{1.12.4}$$

式（1.12.1）の作用から導かれる場の方程式も同じ結果を与える（ここで，いつものように $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ である）．この方程式は，1 次元座標 φ をポテンシャル $V(\varphi)$ と摩擦力 $-3H\dot{\varphi}$ のもとで運動する単位質量の粒子が従う方程式と等価である．場は $V(\varphi)$ が小さくなる方向に変化し，その変化は $V(\varphi)$ が最小値，あるいは最低でも局所的最小値を持つ値に到達したときに止まる．残念ながら我々は，どうして $V(\varphi)$ が小さくなくてはいけないのかまったく知らない．

それでも，ポテンシャルに定数を加えるか差し引くかして最小値がゼロになるようにさえすれば，いくつか有用な性質を持つポテンシャルを得ることができる．クインテッセンスモデルの元祖で最も単純な例は以下のポテンシャルで与えられ

る[*2]．

$$V(\varphi) = M^{4+\alpha}\varphi^{-\alpha}, \tag{1.12.5}$$

ここで α は任意の正定値，M は（$\hbar = c = 1$ の単位系で）質量の単位を持ち，$V(\varphi)$ はエネルギー密度の単位を持つ．ポテンシャルの形がこうでなければならない特別の理由はないし，とりわけ（他のすべての場の量子ゆらぎの効果を含む）定数を加えたり差し引いたりして，$\varphi = \infty$ におけるポテンシャルの最小値をゼロにする理由はない．そういった問題はあるにせよ，この特殊なクインテッセンスモデルの帰結を見てみるのは有益であろう．

どのようなポテンシャルに対しても，十分に初期の宇宙では ρ_φ が放射エネルギー密度 ρ_R よりもずっと小さかったと仮定する必要がある．なぜなら，3.2 節で見るように，宇宙の元素合成の時期においてエネルギー密度が上昇すれば，観測されている存在量を超えるヘリウムが生じてしまうからである．宇宙初期では放射（ニュートリノのように質量が $k_{\mathcal{B}}T$ より小さい全粒子を含む）のエネルギー密度は非相対論的物質のエネルギー密度よりも大きいので，式（1.5.34）より $a(t) \propto t^{1/2}$，そして $H = 1/2t$ を得る．場の方程式（1.12.4）に式（1.12.5）で与えられるポテンシャルを代入すれば，

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2t}\dot{\varphi} - \alpha M^{4+\alpha}\varphi^{-\alpha-1} = 0. \tag{1.12.6}$$

これは以下の解を持つ．

$$\varphi = \left(\frac{\alpha(2+\alpha)^2 M^{4+\alpha} t^2}{6+\alpha}\right)^{\frac{1}{2+\alpha}}. \tag{1.12.7}$$

よって，$\dot{\varphi}^2$ も $V(\varphi)$ も時間とともに $t^{-2\alpha/(2+\alpha)}$ のように変化し，したがって ρ_φ は，宇宙初期で t^{-2} のように変化する ρ_R よりも必ず小さいことになる．この解は唯一ではないが，他のどのような解も t が増加するにしたがってこの解に近づくという意味でアトラクター解である．(これを理解するため，式（1.12.7）で与えられる解に摂動 $\delta\varphi$ を与えてみよう．摂動は以下の式を満たす．

$$0 = \delta\ddot{\varphi} + \frac{3}{2t}\delta\dot{\varphi} + \alpha(1+\alpha)M^{4+\alpha}\varphi^{-\alpha-2}\delta\varphi = \delta\ddot{\varphi} + \frac{3}{2t}\delta\dot{\varphi} + \frac{(6+\alpha)(1+\alpha)}{(2+\alpha)^2 t^2}\delta\varphi.$$

---

*2　P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Astrophys. J.*, **325**, L17 (1988); B. Ratra, P. J. E. Peebles, *Phys. Rev.*, **D 37**, 3406 (1988); C. Wetterich, *Nucl. Phys.*, **B302**, 668 (1988). このポテンシャルを持つクインテッセンスモデルは以下の論文で重点的に研究されている．I. Zlatev, L. Wang, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 896 (1999); P. J. Steinhardt, L. Wang, I. Zlatev, *Phys. Rev.*, **D 59**, 123504 (1999).

これは 2 つの独立解を持つ.

$$\delta\varphi \propto t^{\gamma}, \quad \gamma = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{(6+\alpha)(1+\alpha)}{(2+\alpha)^2}}.$$

平方根は $\alpha > 0$ に対して虚数を与えるから，$\delta\varphi$ の解は両方とも t が増加するとともに $t^{-1/4}$ のように減衰する．一方で φ 自身の値は増加する.）この理由のため，$t \to 0$ において式（1.12.7）のように振る舞う式（1.12.6）の特解は**トラッカー解**として知られている．スカラー場の初期条件に対し，スカラー場が現在までにトラッカー解に近づくべしという条件（そのような初期条件は「アトラクションの内湾」（basin of attraction）と呼ばれる）を要請する物理的な理由は特にないのだが，この要請によってスカラー場の現在の進化が初期条件に依存しなくなるため，たった 2 つの自由パラメータ，M と α，を持つクインテッセンスモデルが得られるという実用上の利便性がある.

放射のエネルギー密度が非相対論的物質のエネルギー密度を下回る時期が来ても，特に何も起こらない．スカラー場のトラッカー解は $t^{2/(2+\alpha)}$ のように成長し続け（ただし異なる係数を持つ），$\dot{\varphi}^2$ と $V(\varphi)$ は $t^{-2\alpha/(2+\alpha)}$ のように減少し続ける．しかし，ρ_M と ρ_R はより速く，それぞれ t^{-2} と $t^{-8/3}$ のように減少するため，結果としてどこかで ρ_M と ρ_R が ρ_φ を下回るようになる．ρ_φ が ρ_M と等しくなる時刻での φ の値が，不明な定数 M に依存しないのは興味深い．宇宙膨張が物質によって支配されているときの ρ_M は式（1.5.31）によって $1/6\pi G t^2$ と与えられるが，式（1.12.2），（1.12.5），（1.12.7）は $\rho_\varphi \approx M^{2(4+\alpha)/(2+\alpha)} t^{-2\alpha/(2+\alpha)}$ を与える．したがって，$\rho_\varphi = \rho_M$ となる時刻 t_c は，

$$t_c \approx M^{-(4+\alpha)/2} G^{-(2+\alpha)/4} \tag{1.12.8}$$

で与えられ，これを式（1.12.7）に代入すれば以下の結果を得る.

$$\varphi(t_c) \approx G^{-1/2}. \tag{1.12.9}$$

ρ_M が ρ_φ を下回れば，$\varphi(t)$ の運動方程式は，

$$\ddot{\varphi} + \sqrt{24\pi G \rho_\varphi}\,\dot{\varphi} - \alpha M^{4+\alpha} \varphi^{-\alpha-1} = 0 \tag{1.12.10}$$

となり，ρ_φ は式（1.12.2）で与えられる．この時期のトラッカー解は複雑な時間依存性を持つが，十分に時間が経過し，現在よりももっと後の時刻になれば再び

単純な形を取る．この式の $\dot{\varphi}$ に比例する減衰項は φ の成長を遅くすることから最終的に $\dot{\varphi}^2$ は $V(\varphi)$ よりも小さくなり，また $\ddot{\varphi}$ に比例する慣性項は減衰項やポテンシャル項に比べて無視できるようになると推測できる（これは，4 章と 10 章で述べるインフレーションの理論で重量な役割を果たす「スローロール」条件と似ている）．この場合，式（1.12.10）は，

$$\sqrt{24\pi G M^{4+\alpha}\varphi^{-\alpha}}\,\dot{\varphi} = \alpha M^{4+\alpha}\varphi^{-\alpha-1}$$

となるから，以下の結果を得る．

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha M^{2+\alpha/2}\varphi^{-\alpha/2-1}}{\sqrt{24\pi G}}. \tag{1.12.11}$$

解は以下で与えられる．

$$\varphi = M\left(\frac{\alpha(2+\alpha/2)\,t}{\sqrt{24\pi G}}\right)^{1/(2+\alpha/2)}. \tag{1.12.12}$$

（この解を得る際，t に積分定数を付与する代わりに時刻のゼロ点を再定義した．）ここで得られた解を用いて，式（1.12.11）を導く際に使った近似の妥当性を確認してみよう．式（1.12.12）より $\dot{\varphi}^2 \propto t^{-(2+\alpha)/(2+\alpha/2)}$ であるが，ポテンシャルは $V(\varphi) \propto t^{-\alpha/(2+\alpha/2)}$ であるから，時間が十分経過すれば，式（1.12.2）の運動エネルギーは確かにポテンシャルに比べて小さくなる．また，$\ddot{\varphi} \propto t^{-(3+\alpha)/(2+\alpha/2)}$ であるが，$V'(\varphi) \propto t^{-(1+\alpha)/(2+\alpha/2)}$ であるから，時間が十分経過すれば，式（1.12.10）の慣性項は確かにポテンシャルに比べて小さくなる．したがって式（1.12.12）が $t \to \infty$ における式（1.12.10）の正しい漸近解であることが確かめられた．数値解より，これは $t \to \infty$ における解であるだけでなく，$t \to \infty$ においてトラッカー解が近づく漸近解でもあることが確かめられる．

$\rho_\varphi \propto t^{-\alpha/(2+\alpha/2)}$ が後期の宇宙膨張率を支配しているときは $\dot{a}/a \propto t^{-\alpha/2(2+\alpha/2)}$ であるから，a の解として以下を得る．

$$\ln a \propto t^{2/(2+\alpha/2)}. \tag{1.12.13}$$

これは宇宙定数によって引き起こされる a の急激な成長 $\ln a \propto t$ に似ているが，それよりは遅い成長である．このモデルの減速パラメータの値 q_0 と，宇宙膨張が宇宙定数で支配されるときの減速パラメータの値 -1 との差は，$t^{-(2+\alpha)/(2+\alpha/2)}$ のように減少する．放射と物質の密度はそれぞれ $1/a^4$ と $1/a^3$ のように減少し，

曲率の項は $1/a^2$ のように減少するが，これらすべては ρ_φ が従う冪則よりも非常に速く減少する．したがって，後期の宇宙の膨張率は確かに ρ_φ に支配されるので，式（1.12.10）の導出法を正当化できる．

このように，少なくともある範囲の初期条件に関しては，式（1.12.5）で与えられるポテンシャルは初期に放射，次に物質，そして後期にスカラー場のエネルギーによって支配される宇宙膨張へと導く．しかし観測と整合させるには，式（1.12.5）に加えても何らおかしくない大きな定数を任意に除去する必要がある上，式（1.12.8）で与えられる，ρ_φ と ρ_M の値が等しくなる時刻が，現在の時刻 $t_0 \approx 1/H_0$ とほぼ同じになるように M の値を合わせる必要がある．より詳しく言えば，式（1.12.8）の結果より，$V(\varphi)$ の定数因子が以下の値を取らねばならないことがわかる．

$$M^{4+\alpha} \approx G^{-1-\alpha/2} H_0^2. \tag{1.12.14}$$

どうしてこの値でなくてはならないのか，その理由はまったくわかっていない．

いくつかの観測グループが，真空のエネルギー密度が宇宙定数のように一定なのか，それとも時間変化しているのかを発見しようと，観測プロジェクトを計画している．そのようなプロジェクトでは，光度距離（あるいは角径距離）を観測し，それを式（1.5.45）の平方根内にある Ω_Λ を時間変化する暗黒エネルギーに置き換えた式と比較する．これらの観測では，現在の時刻における w の値 w_0 を直接測定するわけではない．現在の時刻における微分 $\dot{w}_0$，$\ddot{w}_0$ などに至っては，より直接性が薄い．なぜなら，そのような目的には小さな赤方偏移における光度距離や角径距離を非常に精度よく測定する必要があるからである．実際の測定は，程よい精度で広範囲の赤方偏移に渡って行われる．そのような測定を理論と比較するには，暗黒エネルギーの時間変化のモデルが必要となる．たとえば単純に w が一定であると仮定したり，w が時間や赤方偏移に関して線形に変化すると仮定するモデルがあるが，そのような振る舞いを持つ物理的モデルは存在しない*3．それよりは，(モデルの自然さについては多くの疑いがあるものの）少なくとも物理的に可能な，時間変動する暗黒エネルギーを与えるポテンシャルを転がるスカラー場モデルと観測を比較する方が好ましいように思う*4．これらの観測は難しいた

---

*3 スカラー場のモデルに近いような赤方偏移依存性を持つ w の関数形は以下の文献で研究されている．J. Weller, A. Albrecht, *Phys. Rev. D*, **65**, 103512 (2002); E. V. Linder, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 091301 (2003) [astro-ph/0208512].

*4 この手法は以下の文献で用いられている．D. Huterer, H. V. Peiris, *Phys. Rev. D*, **75**, 083502 (2007) [astro-ph/0610427]; R. Crittenden, E. Majerotto, F. Piazza [astro-ph/0702003].

め，たった 2 つのパラメータで記述できるスカラー場のモデルを採用するのは有益である．その 2 つのパラメータは，たとえば $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$（ただし平坦な宇宙を仮定し，放射のエネルギー密度を無視する）と w_0 を使って表すことができる．

一つの可能性として，宇宙膨張によって宇宙が最近 e 倍となった期間におけるスカラー場 φ の値に対し，$V(\varphi)$ がゆっくりとしか変化しなかった場合を考えよう．もし $V(\varphi)$ がまったく変化しなかったならそれは定数である真空のエネルギーと等価であり，$w = -1$ となる．この場合，唯一のパラメータは Ω_Λ である．2 つのパラメータを考える際には，たとえば $V(\varphi)$ の変化が φ に関して線形であると取れる．

$$V(\varphi) = V_0 + \Big(\varphi - \varphi_0\Big) V_0'. \tag{1.12.15}$$

この式は，もし $1/H_0$ 程度の時間幅における $V'(\varphi)$ の変化が小さい，つまり，もし $|V_0'' \dot{\varphi}_0| \ll H_0 |V_0'|$ が満たされていれば，有効である．

$\varphi(t)$ に関する場の方程式（1.12.4）は，独立変数 t と従属変数 φ を以下で定義される無次元変数 x と ω にそれぞれ置き換えることで，便利な無次元形式に書くことができる．

$$x \equiv H_0 \sqrt{\Omega_M} t, \qquad \omega \equiv \frac{8\pi G V(\varphi)}{3\Omega_M H_0^2}. \tag{1.12.16}$$

V は φ に関して線形であるから，以下の式を得る．

$$\dot{\varphi} = \frac{3\Omega_M H_0^2 \dot{\omega}}{8\pi G V_0'} = \frac{3\Omega_M^{3/2} H_0^3}{8\pi G V_0'} \frac{d\omega}{dx}.$$

これより式（1.12.4）は，

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + 3\mathcal{H} \frac{d\omega}{dx} + \lambda = 0 \tag{1.12.17}$$

と書け，λ は無次元パラメータ，

$$\lambda \equiv \frac{8\pi G V_0'^2}{3 H_0^4 \Omega_M^2} \tag{1.12.18}$$

そして $\mathcal{H}$ は ω と $d\omega/dx$ の関数である．

$$\mathcal{H} \equiv \frac{H}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} = \sqrt{(1+z)^3 + \omega + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2}. \tag{1.12.19}$$

赤方偏移に関する微分方程式も必要である.

$$\frac{dz}{dx} = -\mathcal{H}(1+z). \tag{1.12.20}$$

一般に，もし x に関する微分をすべて z に関する微分で書いたなら，これらの方程式を解くにはある z の初期値における ω と $d\omega/dz$ の初期条件が必要となり，λ と合わせて全部で 3 つのパラメータで記述される解を持つ．しかし，高赤方偏移のエネルギー密度は真空のエネルギーではなく物質によって支配されているとするならば（そして後に見るように実際そうである），物質優勢期の後期における微分 $d\omega/dx$ は初期条件にほとんどよらなくなる[*5]．$z \gg 1$ に対して式（1.12.19）は，

$$\mathcal{H} \to (1+z)^{3/2} \tag{1.12.21}$$

を与えるので，式（1.12.17）と（1.12.20）は以下の解を持つ．

$$1+z \to \left(\frac{3x}{2}\right)^{-2/3}, \qquad \frac{d\omega}{dx} \to -\frac{\lambda x}{3}. \tag{1.12.22}$$

（z の解の積分定数は時刻のゼロ点を適当に選ぶことによって x の定義に吸収した．$d\omega/dx$ の解の積分定数は無視した．$d\omega/dx$ の積分定数を含む項は時間が経過するにつれ $x^{-2} \propto t^{-2}$ のように減衰する.）こうして得られた解の持つ自由パラメータは λ と，x のある任意の初期値 x_1 における ω の値である．ただし x_1 は，宇宙のエネルギー密度が真空のエネルギーではなく物質のエネルギーで支配される時期に対応するように小さくとる（定数 V_0 はこれらの式のどこにも現れないことに注意しよう．それは $\omega(x_1)$ に寄与するが，わざわざ分けて書く必要はない）．そこで，λ と $\omega(x_1)$ の様々な値を試してみなければならない．式（1.12.22）を用い，$1+z$ と $d\omega/dx$ を $x = x_1$ において計算し，これらの初期条件を用いて微分方程式（1.12.17）と（1.12.20）を数値的に x_1 から $z = 0$ に対応する x_0 まで積分し，得られた特解から必要に応じて $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$ および比 p_φ/ρ_φ の現在の値 w_0 を求める[*6]．

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} = \omega(x_0) + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2_{x=x_0}, \quad w_0 = \frac{(d\omega/dx)^2_{x=x_0} - 2\lambda\omega(x_0)}{(d\omega/dx)^2_{x=x_0} + 2\lambda\omega(x_0)}. \tag{1.12.23}$$

[*5] ロバート・カーンとの私信より．カーンはまた，場の方程式で 2 階微分を無視する近似はこの状況下ではうまくいかないことも示した．

[*6] すでに述べたように，この種のモデルでは $w_0 > -1$ しか得られない．$w_0 < -1$ の場合を観測と比較するには，式（1.12.1）で与えられる作用の微分項が逆の符号を持つモデルを採用する必要がある．そうすれば，適当な箇所で符号を変えるだけで，ここで与える解析手法がそのまま使える．

ある時刻における暗黒エネルギーと現在の値との比は,

$$\xi \equiv \frac{\rho_V(t)}{\rho_V(t_0)} = \frac{(d\omega(x)/dx)^2 + 2\lambda\,\omega(x)}{(d\omega/dx)^2_{x=x_0} + 2\,\lambda\omega(x_0)} \tag{1.12.24}$$

で与えられる．たとえば，もし $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M = 0.76$ と $w_0 = -0.777$ ととれば，暗黒エネルギー密度とその現在の値の比 ξ は $z = 1$ で 1.273，無限大の赤方偏移では 1.340 に上昇する*7．大きな z で $\xi(z)$ が一定の値に近づくのは，赤方偏移が大きくなるにつれて物質密度が増加し，宇宙の膨張率が大きくなり，したがって式 (1.12.4) における摩擦項 $3H\dot{\varphi}$ が早期のスカラー場の値を凍結させるからである．

式 (1.12.15) のポテンシャルでは，高赤方偏移の暗黒エネルギー密度が一定に近づくからといって，暗黒エネルギーの観測をこのポテンシャルの理論予言と比較することがクインテッセンスの理論の動機づけとなったアイデア，すなわち，現在，真空のエネルギーが小さいのは宇宙が古いからというアイデア，をあきらめるわけではない．事実，$V(\varphi) \propto \varphi^{-\alpha}$ で与えられるポテンシャルでは，典型的な初期条件に対してクインテッセンスのエネルギーは最初急速に減少し，その後スカラー場がポテンシャルをゆっくり転がっている間はほぼ一定値を取り，最終的に場はトラッカー解に達する．ただし，もし α が小さければ，現在の時刻までにトラッカー解に達しない*8．このポテンシャルが，$1/H_0$ 程度の期間に渡って線形と扱って良い条件，$|V_0''\dot{\varphi}_0| \ll H_0|V_0'|$ を満たすようにするには，$\alpha(1+\alpha)\varphi_0^{-2} \ll 8\pi G$ を満たせば良い．式 (1.12.9) によれば $\alpha < 1$ のときこの条件は満たされる．

2 つのパラメータモデルのもう一つの可能性として同じ形のポテンシャル $V(\varphi) \propto \varphi^{-\alpha}$ を考え，スカラー場が早期の，物質優勢期のある時刻（たとえば $z \leqq 10$）にトラッカー解に達したという仮定を置いてみよう．この仮定により，観測可能な期間における暗黒エネルギーの歴史は初期条件によらなくなり，モデルはただ 2 つのパラメータ，M と α で記述できる．このモデルを記述する方程式を無次元形式に書き換えよう．まず，ポテンシャルの結合定数を以下で定義される無次元パラメータ β で書き換える．

$$M^{4+\alpha} \equiv \beta\,\Omega_M\,H_0^2\,(8\pi G)^{-1-\alpha/2}. \tag{1.12.25}$$

次に，独立変数 t と従属変数 φ をそれぞれ，以下で定義される無次元変数 x と f

---

*7 様々な値の赤方偏移における数値計算の結果を表 1.1 に示す．線形ポテンシャルに関する結果はロバート・カーン（私信）によって計算された．

*8 Steinhardt, Wang, Zlatev, 脚注 2 を参照．

表 1.1 暗黒エネルギーとその現在の値との比．式（1.12.5）のポテンシャルで与えられるトラッカー解，および式（1.12.15）で与えられる線形ポテンシャルから得られた結果を $\Omega_M = 1 - \Omega_\Lambda = 0.24$ と $w_0 = -0.777$ の場合に示す．比較のため，w が定数 $w = -0.777$ の場合の結果も示す．

z	トラッカー	線形	定数 w
0	1	1	1
0.1	1.067	1.062	1.066
0.5	1.347	1.200	1.312
1	1.712	1.273	1.590
2	2.469	1.318	2.086
3	3.224	1.331	2.528
$\gg 1$	$\gg 1$	1.340	$\gg 1$

で書き換える．

$$t \equiv x/H_0\sqrt{\Omega_M}, \qquad \varphi(t) \equiv f(x)/\sqrt{8\pi G}. \tag{1.12.26}$$

そうすれば，物質と真空のエネルギーが支配する時期の場の方程式（1.12.4）は（スローロール近似なしに）以下の形を取る．

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + 3\mathcal{H}\frac{df}{dx} - \alpha\beta f^{-\alpha-1} = 0, \tag{1.12.27}$$

ここで

$$\mathcal{H} \equiv H/\sqrt{\Omega_M}H_0 = \sqrt{\frac{1}{6}\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \frac{\beta}{3}f^{-\alpha} + (1+z)^3} \tag{1.12.28}$$

であり，また，

$$\frac{dz}{dx} = -\mathcal{H}(1+z) \tag{1.12.29}$$

である．式（1.12.7）で与えられる高赤方偏移の解はアトラクターであるから，初期条件が自由パラメータとはならない．これらの無次元変数に対する初期条件は $x \to 0$ において以下で与えられる．

$$f \to \left[\frac{\alpha\beta(\alpha+2)^2 x^2}{2(\alpha+4)}\right]^{1/(\alpha+2)}, \quad 1+z \to \left(\frac{2}{3x}\right)^{2/3}. \tag{1.12.30}$$

式（1.12.30）の初期条件を用い，式（1.12.27）と式（1.12.29）をある小さな x（たとえば $x = 0.01$）から $z = 0$ に対応する x_0 まで積分し，$\mathcal{H}(x_0) = 1/\sqrt{\Omega_M}$ の条件から $\Omega_M = 1 - \Omega_\Lambda$ を計算する．また，比 $w \equiv p_\varphi/\rho_\varphi$ の現在の値 w_0 は以下の式から計算でき，

$$w_0 = \frac{f'^2(x_0)f(x_0)^\alpha/2\beta - 1}{f'^2(x_0)f(x_0)^\alpha/2\beta + 1}, \tag{1.12.31}$$

これらを用いてパラメータ α と β を Ω_M と w_0 に焼き直すことができる．たとえば，もし適当に $\alpha = 1$ と選べば，現実的な値 $\Omega_M = 0.24$ を得るために $\beta = 9.93$ と選ばねばならず，この場合 $w_0 = -0.777$ となる．もちろん，他の α の値を選び，同じ Ω_M の値を与えるように β を最調節すれば，他のどのような -1 より大きい w_0 の値も得ることができる（ただし α が小さくなると，現在の時刻よりずっと以前にトラッカー解に達するような初期条件の範囲は狭くなる）．たとえば，$\alpha = 1/2$ ならば $\Omega_M = 0.24$ を得るため $\beta = 7.82$ でなくてはならず，この場合 $w_0 = -0.87$ となる（$w < -1$ の場合に関しては脚注 6 を見よ）．$\Omega_M = 0.24$ と $w_0 = -0.777$ に対して計算された暗黒エネルギーとその現在の値との比を表 1.1 に示す．また，同じ Ω_M と w_0 の値に対し，w が一定の場合と式（1.12.15）で与えられる線形ポテンシャルの場合も表 1.1 に示す．トラッカーモデルと線形モデルは，暗黒エネルギーの時間依存性に関して明らかに正反対の仮定を代表しているが，両者ともに，定数 w を仮定するよりは物理的な動機づけがある．

1.13 地平線

現代宇宙論は，二つの異なるタイプの地平線を持つ．一つは過去の事象が観測可能な距離を制限するもので，もう一つは将来の事象が観測可能な距離を制限するものである．これらはリンドラー[*1]によってそれぞれ**粒子の地平線**，**事象の地平線**と名付けられた．

式（1.2.2）によれば，もしビッグバンが時刻 $t = 0$ で始まったとすれば，時刻 t における観測者が光速度で伝播する信号を受け取ることのできる最大のロバートソン–ウォーカー動径座標の値 $r_{\text{粒子}}(t)$ は以下の条件で与えられる．

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{\text{粒子}}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \tag{1.13.1}$$

---

*1 W. Rindler, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **116**, 663 (1956).

つまり，積分 $\int dt/a(t)$ が $t=0$ で収束する限り粒子の地平線が存在する．従来の宇宙論では，この積分は確かに収束する．現在における物質や真空のエネルギーの寄与がどうであれ，宇宙初期のエネルギー密度は放射によって支配されていたであろうから，$a(t) \propto t^{1/2}$ であり，したがって積分は収束する．地平線の固有距離は式（1.1.15）と式（1.13.1）で以下のように与えられる．

$$d_{\text{粒子}}(t) = a(t) \int_0^{r_{\text{粒子}}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \tag{1.13.2}$$

たとえば，放射優勢期 $a(t) \propto t^{1/2}$ では $d_{\text{粒子}}(t) = 2t = 1/H$ である．十分に物質優勢期に入っていれば，式（1.13.1）の積分のほとんどが $a \propto t^{2/3}$ の時期からの寄与であるから，$d_{\text{粒子}}(t) \simeq 3t = 2/H$ である．現在の時刻では，t' に渡る積分のほとんどが物質と真空のエネルギー，あるいは曲率によって支配される時期からの寄与である．式（1.5.41）によれば，現在の粒子の地平線の距離は以下の式で与えられる．

$$d_{\text{粒子}}(t_0) = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3}}}. \tag{1.13.3}$$

4 章において，放射優勢期以前の宇宙が真空のエネルギーに支配されていたかもしれないという可能性を見る．その場合粒子の地平線の距離は実は無限大となってしまうが，望遠鏡による観測で見ることのできる固有距離の限界は式（1.13.3）で与えられる．

現在見ることのできない過去の事象があるように，決して見ることのできない将来の事象があるかもしれない．再び式（1.2.2）に戻ろう．もし宇宙が時刻 T に収縮して崩壊するとすれば，現在の時刻 t よりも後に放射された，光速度で伝播する信号を観測者が受け取ることのできる最大の r の値 $r_{\text{事象}}$ は以下の条件で与えられる．

$$\int_t^T \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{\text{事象}}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}. \tag{1.13.4}$$

たとえ将来が無限に続くとしても，もし積分 $\int dt/a(t)$ が $t=\infty$ で収束すれば事象の地平線が存在し，それは以下で与えられる．

$$\int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{\text{事象}}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}. \tag{1.13.5}$$

共動的な光源はある一定の r を持つから，条件 $r < r_{事象}$ は，時刻 t で生じる事象のうち，我々が将来に渡って観測可能な事象を制限する．宇宙が将来崩壊しない場合，事象の地平線の固有距離は以下の式で与えられる．

$$d_{事象}(t) = a(t)\int_0^{r_{事象}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = a(t)\int_t^{\infty} \frac{dt'}{a(t')}. \tag{1.13.6}$$

宇宙定数がなければ $a(t)$ は $t^{2/3}$ のように成長するから，この積分は発散し，事象の地平線は存在しない．しかし，宇宙定数があれば $a(t)$ は最終的に $\exp(Ht)$ のように成長し，$H = H_0\Omega_\Lambda^{1/2}$ は定数となる．したがって事象の地平線は存在し，無限の未来では $d_{事象}(\infty) = 1/H$ に漸近する．時間が経過するとともに，重力で束縛された我々の局所銀河群の外側にある全光源はこの地平線の外側に移動し，観測不可能となる．同様なことが前節で述べたクインテッセンス理論にもあてはまる．その場合 $a(t)$ は最終的に $\exp(定数 \times t^{2/(2+\alpha/2)})$ のように成長するから，すべての $\alpha \geqq 0$ に対して式（1.13.6）の積分は収束する．

もし光源が，我々を座標原点に置くロバートソン–ウォーカー座標で動径座標 r にあるならば，我々は，光源を座標原点に置くロバートソン–ウォーカー座標で動径座標 r にいることになる．したがって式（1.13.4）や式（1.13.5）は，時刻 t から出発して我々がたどり着くことのできる最大の動径座標も与える．

第2章
宇宙マイクロ波背景放射

1960 年代中頃以前に我々が得ていた宇宙の構造と進化に関する情報のうち大部分は，1 章で議論した遠方銀河の赤方偏移と距離の観測から得られていた．1965 年，ほぼ等方的なマイクロ波の背景放射が発見され，宇宙論に関する新しいデータが豊富にもたらされた．この章では，この放射の予測と発見の歴史を概観したのち，この放射がもたらす宇宙論的意義をいくつか調べる．ここでは放射の異方性には少ししか触れないが，7 章において，5 章と 6 章で扱う宇宙論的ゆらぎの進化の解析を適用する形でこの非常に重要なトピックに戻る．また，10 章では超初期宇宙におけるゆらぎの起源を考える．

2.1　マイクロ波背景放射の予測と発見

膨張する流体が持つ圧力がなす仕事は，流体の熱エネルギーを消費する．宇宙は膨張しているから，現在に比べ過去の宇宙では物質の温度，および密度はより高かったと予測できる．もし十分な過去に遡れば、物質の温度が高すぎるため，電子が原子に束縛されない時期に到達する．十分な宇宙初期では光子と自由電子の頻繁な衝突のため，放射は熱くて密度の高い物質と熱平衡状態にあったであろう．温度 T を持つ物質と熱平衡状態にある光子の数密度は，周波数 ν から $\nu + d\nu$ の間において以下の**黒体放射スペクトル**で与えられる．

$$n_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2\, d\nu}{\exp\left(h\nu/k_{\mathcal{B}}T\right) - 1}, \tag{2.1.1}$$

ここで h はプランク定数（プランク定数は，この式と等価な式において最初に使用された）で，$k_{\mathcal{B}}$ はボルツマン定数である（$c = 1$ の単位系を用いていることも忘れずに）．

時間の経過とともに物質は冷え密度が下がり，ついには熱平衡状態が終了し，放射は自由に膨張し始める．しかし，**そのスペクトルは同じ形を保ち続ける．**これは，以下のような極端な仮定を置いてみればたやすく理解できる．時刻 t_L で突然放射と物質の熱平衡状態が終わり，放射が自由に膨張し始めたとしよう（添字の L は「Last scattering（最終散乱）」の略）．ある時刻 t で自由に伝播する光子の周波数が ν だとすると，放射と物質の熱平衡状態が終わった時刻でのその光子の周波数は $\nu a(t)/a(t_L)$ で与えられる．したがって，時刻 t において周波数が ν から $\nu + d\nu$ の間にある光子の数密度は，

$$n(\nu, t)\, d\nu = \Big(a(t_L)/a(t)\Big)^3 n_{T(t_L)}\Big(\nu a(t)/a(t_L)\Big)\, d(\nu a(t)/a(t_L)) \tag{2.1.2}$$

で与えられるだろう．宇宙膨張によって光子の数密度が薄まるため，$\Big(a(t_L)/a(t)\Big)^3$ がかかっている．式（2.1.1）を式（2.1.2）に代入すれば，指数関数にある赤方偏移を表す因子 $a(t)/a(t_L)$ はすべて打ち消し合うので，時刻 t における数密度は，

$$n(\nu, t)d\nu = \frac{8\pi\nu^2\, d\nu}{\exp\left(h\nu/k_{\mathcal{B}}T(t)\right) - 1} = n_{T(t)}(\nu)\, d\nu \tag{2.1.3}$$

で与えられ，温度 $T(t)$ は以下で与えられる．

$$T(t) = T(t_L)a(t_L)/a(t). \tag{2.1.4}$$

したがって，光子と物質の熱平衡状態が終わった後であっても光子の数密度は黒体放射の形で与えられ，その温度は式（2.1.4）のように赤方偏移を受けた温度である．

たとえ宇宙が不透明な状態から透明な状態に遷移するのに有限な時間を要したとしても，その間の光子と物質の相互作用が光子の周波数を変えない弾性散乱である限り，この結論は変わらない．そしてこれは大変良い近似である．2.3 節で見るように，（ほぼ現在の時刻になるまで）光子と物質の最後の相互作用は，宇宙の温度が 3000 K 程度の時刻で生じたものである．この時刻で圧倒的に重要な相互作用は光子と電子の弾性散乱であり，この相互作用で生じる光子の周波数の相対的変化は $k_{\mathcal{B}}T/m_e c^2 \approx 3 \times 10^{-7}$ 程度である．次節で示すように，光子のエントロピーが大きいため，弾性散乱における微小な光子周波数の変化や比較的頻度の低い光子と水素原子の非弾性散乱は，光子のスペクトルにほとんど何の影響も与えない．

1940 年代後期，ジョージ・ガモフと彼の共同研究者たちにより，宇宙は黒体放

射で満ちているべきことが初めて指摘された[*1]．現在の時刻におけるこの放射の温度の最初のもっともらしい推定は，ラルフ・アルファーとロバート・ハーマンによって 1950 年になされた[*2]．3.2 節で議論する宇宙の元素合成に関する考察に基づき，彼らは現在の温度を 5 K と推定した．この仕事はその後 10 年間，1965 年にプリンストン大学のグループが初期宇宙の残光である宇宙背景放射の探査を開始するまで，忘れ去られていた．プリンストン大学のグループは，P. ジェームス・E. ピーブルスの元素合成の計算に基づいて得られた 10 K という値のように，その温度に関しておおまかなアイデアを持っていた[*3]．彼らが実験を完成させる前に，この放射はアーノ・ペンジアスとロバート・ウィルソンによる電波望遠鏡の背景雑音の研究の中で発見され[*4]，その成果はプリンストン大学のグループによる，宇宙論的重大性を説明するもう一つの論文[*5]とともに出版された[*6]．

ペンジアスとウィルソンは，波長 7.5 cm におけるアンテナ温度，すなわち，測定された放射が**この単一の波長で持つ**強度を式（2.1.1）と比較して得られる温度で表すと，3.5±1.0 K であったと報告した．もちろんこれだけでは，彼らが観測したものが黒体放射であったと示すことはできない．その後，ロルとウィルキンソン[*7]が波長 3.2 cm の放射強度を測定し，アンテナ温度 3.0 ± 0.5 K を得た．これは，ペンジアスとウィルソンによって測定された温度を持つ黒体放射に期待される値と合致している．その後 2, 3 年に渡り，他の電波天文学者により，様々

---

*1 G. Gamow, *Phys. Rev.*, **70**, 572 (1946); R. A. Alpher, H. A. Bethe, G. Gamow, *Phys. Rev.*, **73**, 803 (1948); G. Gamow, *Phys. Rev.*, **74**, 505 (1948); R. A. Alpher, R. C. Herman, *Nature*, **162**, 774 (1948); R. A. Alpher, R. C. Herman, G. Gamow, *Phys. Rev.* **74**, 1198 (1948); *ibid* **75**, 332A (1949); *ibid* **75**, 701 (1949); G. Gamow, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 367 (1949); R. A. Alpher, *Phys. Rev.*, **74**, 1577 (1948); R. A. Alpher, R. C. Herman, *Phys. Rev.*, **75**, 1089 (1949).

*2 R. A. Alpher, R. C. Herman, *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 153 (1950).

*3 この仕事が出版されることはなかった．アラン・グースの *The Inflationary Universe*, Perseus Books, Reading, MA (1997)；(邦訳)『なぜビッグバンは起こったのか——インフレーション理論が解明した宇宙の起源』はやしはじめ・はやしまさる訳，早川書房 (1999) によれば，ピーブルスの論文はフィジカル・レビュー誌によって棄却されたが，それはアルファー，ガモフ，ハーマンの早期の仕事へのクレジットの与え方の問題のためだったようである．この早期の仕事とピーブルスの仕事については，3.2 節で手短かに述べる．

*4 A. A. Penzias, R. W. Wilson, *Astrophys. J.*, **142**, 419 (1965).

*5 R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, D. T. Wilkinson, *Astrophys. J.*, **142**, 414 (1965).

*6 これらの発展に関するより詳細な歴史に関しては，A. Guth, *op. cit.* および S. Weinberg, *The First Three Minutes*, Basic Books (1977); 第 2 版 (1993)；(邦訳)『宇宙創成はじめの 3 分間』小尾信彌訳，ちくま学芸文庫 (2008) を見よ．

*7 P. G. Roll, D. T. Wilkinson, *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 405 (1966).

な波長において多くの測定がなされた．これらの測定もまた，測定がなされた波長におけるアンテナ温度として 3 K 程度の値を与え，その精度は次第に 0.2 K 程度まで改善された．しかしこれらの測定をもってしても，放射が黒体放射であると結論づけることはできなかった．なぜなら，これらの測定はすべて，$T \approx 3$ K を持つ黒体放射のエネルギー分布 $h\nu n_T(\nu)$ が最大値を持つ波長 0.3 cm より長い波長で行われていたからである．このような長波長では，式（2.1.1）の指数関数は小さいので，$h\nu n_T(\nu)$ は以下のように近似できる．

$$h\,\nu\,n_T(\nu) \simeq 8\pi\nu^2\,k_B T, \tag{2.1.5}$$

これは古典的な統計力学における**レイリー–ジーンズの公式**であるが，この公式は黒体放射よりももっと一般的な，様々な状況下における放射エネルギーの長波長分布をも記述する．たとえば，個々の光子のエネルギーを保存しつつ，膨張によって薄められた黒体放射もまた，低周波数において $h\nu\,n(\nu) \propto \nu^2$ を持つ[*8]．宇宙マイクロ波背景放射が真に黒体放射であると結論するには，波長が約 0.3 cm より短いところにおける $n_T(\nu)$ の指数関数的減少の，せめて兆候だけでも観測する必要があった．

波長が約 0.3 cm より短くなるにつれて地球大気は光に対してどんどん不透明になるから，この測定は困難なものであった．しかし，ペンジアスとウィルソンによる発見よりもずっと前の 1941 年に，波長 0.264 cm の放射温度の測定が存在していた．へびつかい座のゼータ星と地球の間には冷たい分子ガスの雲があり，吸収によって星のスペクトルに暗線が生じる．

1941 年，ウォルター・S. アダムス[*9]は，アンドリュー・マッケラーの示唆を受け，分子雲中のシアノ化合物（CN）による光の吸収線であると同定できる二本の暗線をへびつかい座ゼータ星のスペクトルで発見した．波長 3874.62 Å で観測された最初の線は，回転角運動量 $J = 0$ を持つ真の基底状態にある CN による光の吸収で説明できた．この吸収によって $J = 0$ の状態は，最初の振動励起状態で $J = 1$ を持つ成分となる．しかし，波長 3874.00 Å で観測された次の線は，$J = 1$ を持つ回転励起状態の振動基底状態にある CN による光の吸収で説明できる．この吸収によって $J = 1$ の振動基底状態は，最初の振動励起状態で $J = 2$ を持つ成

[*8] 地球表面に降り注ぐ太陽光は，薄められた黒体放射の良い例である．それは太陽の表面温度 $T \approx$ 6000 K を持つプランクの公式（2.1.1）で記述されるが，式（2.1.1）の右辺には $(R_\odot/r)^2$ がかかる．ここで $R_\odot$ は太陽半径，r は太陽と地球の距離である．

[*9] W. S. Adams, *Astrophys. J.*, **93**, 11 (1941).

分となる[10]．これよりマッケラー[11]は，この雲に存在する CN 分子のうち，ある比率がすでに振動基底状態の最初の回転励起状態（$J = 0$ を持つ真の基底状態から $hc/(0.264\ \mathrm{cm})$ だけエネルギーが高い状態）にあり，その比率から分子の温度が 2.3 K であると推定した．もちろん，彼は CN 分子が放射によって励起されているとは思わなかったし，ましてやそれが黒体放射によるものだとは夢にも思わなかっただろう．ペンジアスとウィルソンの発見の後，何人かの天文学者[12]が独立に，このアダムス–マッケラーの結果は波長 0.264 cm で 3 K 程度の温度を持つ黒体放射で説明できることを指摘した．理論研究からは，それ以外のどの可能性もこの回転励起状態を説明できないことがわかった[13]のである．この解釈は，へびつかい座ゼータ星や他の恒星スペクトル中におけるこの CN 吸収線および他の CN 吸収線の継続的な観測，さらには CH や CH^+ の吸収線の観測によって支持された[14]．

その後，気球やロケットを用いた地球大気上空での観測により，宇宙マイクロ波背景放射が黒体放射のスペクトルを持つことを波長 0.3 cm 以下の領域においても確認する試みがはじまった．何年かに渡り，これら短波長のデータから得られた放射強度は黒体放射の公式に比べて超過しているという報告があった．したがって，こうした観測を宇宙から行わなければならないことは明らかであった．しかし，これは困難なことである．マイクロ波の放射強度の絶対値を測定するには，宇宙から受け取る放射を液体ヘリウムでできた「低温負荷」の放射強度と比較する必要があるが，液体ヘリウムはすぐに蒸発してしまう．だがついに，1989 年 11 月に宇宙背景放射探査衛星（COBE）が打ち上げられ，それに搭載されたスペクトル測定器 FIRAS による観測で，マイクロ波背景放射が黒体放射のスペクトルを持つことが明らかとなった[15]．1990 年 1 月のアメリカ天文学会で，ジョ

---

[10] 現在では，これら 2 本の線の波長はより正確にわかっており，それぞれ 3874.608Åと 3873.998Å である．これらに加え，3875.763Åにもう一つ線があり，これは $J = 1$ を持つ回転励起状態の振動基底状態から最初の振動励起状態で $J = 0$ を持つ成分への遷移によって生じる．

[11] A. McKellar, *Publs. Dominion Astrophys. Observatory*, **7**, 251 (1941).

[12] G. Field, G. H. Herbig, J. L. Hitchcock, *Astron. J.*, **71**, 161 (1966); G. Field, J. L. Hitchcock, *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 817 (1966); *Astrophys. J.*, **146**, 1 (1966); N. J. Woolf は P. Thaddeus, J. F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 819 (1966) に引用されている; I. S. Shklovsky, Astronomicheskii Tsircular No. **364** (1966).

[13] Field *et al.*, 脚注 12 を参照; Thaddeus, Clauser, 脚注 12 を参照.

[14] これらの早期の仕事のまとめ，およびもとの文献への引用は G&C，表 15.1 を見よ．

[15] J. C. Mather *et al.*, *Astrophys. J.*, **354**, 237 (1990).

ン・C. マーザーが観測されたスペクトルと黒体放射のプランクスペクトルとの合致を示すスライドを見せたとき，聴衆は総立ちで拍手を贈った．背景放射は，波長 0.5 cm から 0.05 cm においてほぼ厳密な黒体放射のスペクトルを持つことが発見されたのである*16．観測データと黒体放射のスペクトルとの比較を図 2.1 に示す．その後 6 年間に渡るさらなる解析の結果，温度は 2.725 ± 0.002 K と決定された（不定性は 95% の信頼領域を示す）*17．波長 3 cm から 75 cm の間，および波長 0.03 cm におけるその他の観測はすべて，上記の温度を持つプランク分布と無矛盾であった*18．

この放射のエネルギー密度は，

$$\int_0^\infty h\,\nu\,n(\nu)\,d\nu = a_{\mathcal{B}}T^4 \tag{2.1.6}$$

で与えられる．$a_{\mathcal{B}}$ は放射定数で，CGS 単位系では以下の数値を持つ．

$$a_{\mathcal{B}} = \frac{8\pi^5 k_{\mathcal{B}}^4}{15h^3c^3} = 7.56577(5)\times 10^{-15}\ \mathrm{erg\ cm^{-3}\ deg^{-4}}. \tag{2.1.7}$$

$T = 2.725$ K を代入すれば，エネルギー密度を得る．そのエネルギー密度と等価な質量密度の単位で表せば（再び $c = 1$ の単位系に戻る），

$$\rho_{\gamma 0} = a_{\mathcal{B}}T_{\gamma 0}^4 = 4.64\times 10^{-34}\mathrm{g\ cm^{-3}}$$

を得る．これと式（1.5.28）で与えられる臨界質量密度の比をとれば，光子の密度パラメータとして，

$$\Omega_\gamma \equiv \frac{\rho_{\gamma 0}}{\rho_{0,\mathrm{crit}}} = 2.47\times 10^{-5}h^{-2} \tag{2.1.8}$$

を得る．3.1 節で見るように，光子は 3 つの異なる種類を持つニュートリノと反ニュートリノを伴っているから，放射（つまり無質量，あるいはほぼ無質量の粒子）の全エネルギー密度は以下で与えられる．

$$\rho_{R0} = \left[1 + 3\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}\right]\rho_{\gamma 0} = 7.80\times 10^{-34}\mathrm{g\ cm^{-3}}, \tag{2.1.9}$$

*16 J. C. Mather *et al.*, *Astrophys. J.*, **420**, 439 (1994).

*17 J. C. Mather, D. J. Fixsen, R. A. Shafer, C. Mosier, D. T. Wilkinson, *Astrophys. J.*, **512**, 511 (1999). G. F. Smoot, in *Proc.* 3K *Cosmology Conf.*, eds., A. Melchiorri *et al.* [astro-ph/9902027] によるレビューは 2.7377 ± 0.0038 K（不定性は 95% の信頼領域）を与えているが，Mather, *et al.* による結果がよく引用されているようだ．

*18 レビューは，G. Sironi, *et al.*, in *Proc. Third Sakharov Conf.* (2002) [astro-ph/0301354].

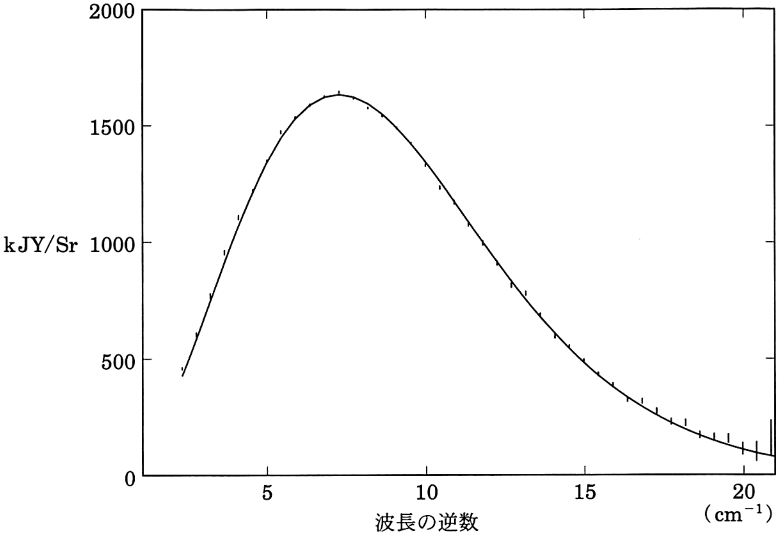


図 2.1 COBE に搭載されたスペクトル測定器 FIRAS によって観測された放射強度の双極的異方性のスペクトルと，2.728 K を持つ黒体放射のスペクトルから期待される双極的異方性のスペクトルとの比較．D. J. Fixsen *et al.*, *Astrophys. J.* **473**, 576 (1996) [astro-ph/9605054] より抜粋．縦軸は 1 ステラジアンあたりに受け取る放射強度をキロジャンスキー単位で与え（1 キロジャンスキーは 10^{-23} erg cm^{-2} s^{-1} Hz^{-1} に等しい），横軸は cm^{-1} を単位とする波長の逆数を与える．標準偏差 1 個分（1 シグマ）に相当する放射強度の実験誤差は微小な縦棒で示されている．波長における誤差は無視できる．

もしくは，式（1.5.28）との比を取って放射の密度パラメータで書けば，

$$\Omega_R \equiv \frac{\rho_{R0}}{\rho_{0,\mathrm{crit}}} = 4.15 \times 10^{-5} h^{-2} \tag{2.1.10}$$

となる．このように，ρ_{R0} は $K = 0$ を与えるのに必要な臨界質量密度よりもはるかに小さく，恒星内にある通常の物質の質量密度に比べてさえはるかに小さい．光度距離を赤方偏移の関数として計算した際に Ω_R を無視したのは，この理由のためである．

一方で光子の**数**密度は，現在でも非常に大きい．式（2.1.1）から，

$$n_{\gamma 0} = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2\,d\nu}{\exp(h\nu/k_{\mathcal{B}}T)-1} = \frac{30\,\zeta(3)}{\pi^4}\frac{a_{\mathcal{B}}T^3}{k_{\mathcal{B}}}$$

$$= 0.3702\frac{a_{\mathcal{B}}T^3}{k_{\mathcal{B}}} = 20.28\,[T(\deg K)]^3\ \mathrm{cm}^{-3} \tag{2.1.11}$$

が得られ，$\zeta(3) = 1.202057\cdots$ である．$T = 2.725$ K を代入すれば，現在の光子の数密度は以下で与えられる．

$$n_{\gamma 0} = 410\ 光子/\mathrm{cm}^3. \tag{2.1.12}$$

これは，以下で与えられる現在の核子の数密度 n_{B0} よりもはるかに大きい．

$$n_{B0} = \frac{3\Omega_B H_0^2}{8\pi G m_N} = 1.123\times 10^{-5}\,\Omega_B\,h^2\ 核子/\mathrm{cm}^3. \tag{2.1.13}$$

n_γ も n_B も時間とともに $a^{-3}(t)$ のように変化するから，その比 n_γ/n_B は，少なくとも光子が自由に伝播する期間に渡り一定である．

* * *

宇宙マイクロ波背景放射がおよぼす効果のうち，長い間その存在が予期されてはいたが，観測が難しかった効果がある．さほど大きくないエネルギーを持つ陽子の宇宙線が宇宙マイクロ波背景放射の光子に衝突しても散乱するだけであり，その散乱確率は微細構造係数 $\alpha \simeq 1/137$ の 2 乗に比例する．しかし，もし陽子が十分に高いエネルギーを持っていたなら，光子が $\gamma + p \to \pi^0 + p$ や $\gamma + p \to \pi^+ + n$ のような過程を通じて π 中間子に転化することも可能である．この反応確率は α^2 でなく α に比例する．高エネルギー宇宙線が銀河系の外側から来ているとすれば，これらの過程の反応断面積が重要になるエネルギーにおいて陽子宇宙線のスペクトルが減少するはずである[*19]．π 中間子は低エネルギーでも生成できるが，上記の過程の実効的な閾値は，衝突前の陽子と光子の重心系における全エネルギー W が，π 中間子と核子の共鳴状態（スピン・パリティ $3/2^+$ とアイソスピン 3/2 を持ち，Δ 粒子と呼ばれる）の質量 $m_\Delta = 1232$ MeV と等しいときの値である．重心系のエネルギーは，

$$W = \left(\left(q + \sqrt{p^2 + m_p^2}\right)^2 - \left|\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}\right|^2\right)^{1/2}$$

---

*19 K. Greisen, *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 748 (1966); G. T. Zatsepin, V. A. Kuzmin, *Pis'ma Sh. Exsp. Teor. Fiz.*, **4**, 114 (1966) [transl. *Sov. Phys. JETP Lett.*, **4**, 78 (1966)]; F. W. Stecker, *Phys. Rev. Lett.*, **21**, 1016 (1968).

$$\simeq \left(2qp\left(1-\cos\theta\right)+m_p^2\right)^{1/2} \tag{2.1.14}$$

で与えられ，$\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{p}$ はそれぞれ衝突前の光子と陽子の運動量ベクトル（ただし $p \gg m_p \gg q$），θ はそれらのベクトル間の角度である．したがって，W が閾値を超える条件 $W > m_\Delta$ は以下の条件を要請する．

$$qp(1-\cos\theta) > m_\Delta^2 - m_p^2. \tag{2.1.15}$$

温度 $T_{\gamma 0} = 2.725$ K を持つ黒体放射の光子の典型的なエネルギーは $\rho_{\gamma 0}/n_{\gamma 0} \simeq 6\times 10^{-4}$ eV であり，また $1-\cos\theta$ が取り得る最大値は 2 であるから，実効的な閾値はおよそ以下の光子エネルギーで与えられる．

$$p_{閾値} \approx \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{2\rho_{\gamma 0}/n_{\gamma 0}} \simeq 10^{20} \text{ eV}. \tag{2.1.16}$$

この効果を観測するのは容易ではない．エネルギーが E と $E+dE$ の間にある陽子宇宙線のフラックス[訳注 1]はおよそ $E^{-3}dE$ に比例するから，非常に高エネルギーな陽子の数は少ない．大雑把にいって，10^{19} eV を超えるエネルギーでは 1 年間に 1 平方キロメートルあたり 1 個の陽子，そして 10^{20} eV を超えるエネルギーでは 1 年間に 1 平方キロメートルあたり 0.01 個の陽子が期待される．このような効率では直接観測は明らかに不可能であり，超高エネルギー宇宙線の観測は，それらが生成する光子や荷電粒子の巨大シャワーの地上観測を通じて間接的に行われなければならなかった．また，光子のエネルギー分布や進行方向の分布はなめらかであるから，スペクトルは 10^{20} eV で鋭く落ちるわけではなく，このエネルギー付近でスペクトルが E^{-3} の曲線を下回っているかどうかで判別することになる[*20]．そのような効果は日本の明野広域空気シャワー観測装置（AGASA, Akeno Giant Air Shower Array）では観測されなかったが[*21]，その後の AGASA のデータ解析，および他の観測によってこの効果の存在が示された[*22]．より最近になり，スペクトル減少の兆候が高分解能フライズ・アイ実験（HiRes, High Resolution Fly's Eye）のデータに現れた[*23]．そして 2006 年，HiRes チームは 1

訳注 1 単位時間および単位面積あたりに観測される宇宙線粒子の数．

*20 たとえば，I. F. M. Albuquerque, G. F. *Astroparticle Phys.*, **25**, 375 (2006) [astro-ph/0504088] を見よ．

*21 M. Takeda *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 1163 (1998).

*22 J. N. Bahcall, E. Waxman, *Phys. Lett.*, **B556**, 1 (2003) [hep-ph/0206217].

*23 R. U. Abbasi, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 151101 (2004) [astro-ph/0208243]; *Phys. Lett.*, **B619**, 271 (2005) [astro-ph/0501317].

次宇宙線のスペクトル中に，ほぼ期待されていたエネルギー 6×10^{19} GeV における「急激な減衰」を観測したと発表した[*24].

2.2 平衡期

前節ですでに述べたように，十分過去にさかのぼれば，温度と密度が十分高く，放射と物質が熱平衡状態にあった時期に必ず到達する．放射と物質の熱平衡状態が終わる時期は次節で扱うとして，ここでは平衡状態にある時期を扱う．

前節で見たように，光子が自由膨張していれば，その周波数分布は式（2.1.1）で与えられる黒体放射のプランクスペクトルの形を保存し，その温度は $1/a(t)$ に比例して減少する．一方，電子や原子核のような非相対論的粒子が自由膨張していれば，その運動量分布はマクスウェル–ボルツマン分布の形 $n(p)dp \propto \exp(-p^2/2mk_{\mathcal{B}}T)$ を保存するが，（式（1.1.23）に示したように）いかなる粒子の運動量も宇宙膨張とともに $p \propto 1/a$ のように減少するから，マクスウェル–ボルツマン分布の温度は $1/a^2(t)$ に比例して減少する．では，もし放射が物質と熱平衡状態にあれば，どちらが勝るのだろうか？　温度は $1/a(t)$ に比例して減少するか，$1/a^2(t)$ に比例して減少するか，はたまたもっと複雑な振る舞いを示すのだろうか？

この問題は，いわば「民主主義的」に解決される．粒子はそれぞれ 1 票ずつ投じるが，電子や核子に比べて光子の数が圧倒的に多いために光子が勝る．そして温度はほぼ厳密に $1/a(t)$ に比例して減少する．

熱力学第 2 法則を適用することでこの問題をより詳しく見てみよう．平衡状態では共動体積中のエントロピーとバリオン数（温度が 10^{13} K よりずっと低ければ，バリオン数は陽子と中性子の数に等しい）は一定であるから，それらの比，つまり 1 バリオンあたりのエントロピーも一定である．1 バリオンあたりのエントロピーを $k_{\mathcal{B}}\sigma$ のように書くと便利だ．ここで $k_{\mathcal{B}}$ はボルツマン定数で，σ は無次元量である．すると熱力学第 2 法則より，

$$d\Big(k_{\mathcal{B}}\sigma\Big) = \frac{d(\varepsilon/n_B) + p\,d(1/n_B)}{T} \tag{2.2.1}$$

が成り立つことがわかる．n_B はバリオンの数密度（したがって $1/n_B$ は 1 バリオンあたりの体積），ε は熱的エネルギー密度，p は圧力である．単純化のため，

[*24] G. B. Thompson, for HiRes Collaboration, in *Proc. Quarks '06 Conf.* [astro-ph/0609403]; R. U. Abbasi *et al.* [astro-ph/0703099].

光子と，(その大部分が陽子，ヘリウム原子核，電子の）非相対論的物質粒子からなる理想気体を考えよう．1 バリオンあたりの非相対論的物質粒子の数 $\mathcal{N}$ は固定する（そしてその大きさは 1 程度である）．すると以下の式が得られる．

$$\varepsilon = a_{\mathcal{B}}T^4 + \frac{3}{2}n_B\mathcal{N}k_{\mathcal{B}}T, \qquad p = \frac{1}{3}a_{\mathcal{B}}T^4 + n_B\mathcal{N}k_{\mathcal{B}}T, \tag{2.2.2}$$

$a_{\mathcal{B}}$ は式（2.1.7）で与えられる放射エネルギー定数である．式（2.2.1）の解は以下で与えられ，

$$\sigma = \frac{4a_{\mathcal{B}}T^3}{3n_Bk_{\mathcal{B}}} + \mathcal{N}\ln\left(\frac{T^{3/2}}{n_BC}\right), \tag{2.2.3}$$

C は任意の積分定数である．熱平衡状態時に一定に保たれるのは，この σ である．

前節で見たように，式（2.2.3）の第 1 項の現在の値は 10^8 より大きい（式（2.1.12）と式（2.1.13）を比較してみよ）．ここで仮に，この量は光子が物質と熱平衡状態にあったときにも 1 より十分大きかったとしてみよう．この時期には σ は一定であるから，$T^{3/2}/n_B$ が大幅に変化しない限り，平衡期には T^3/n_B も非常に良い近似で一定だったはずだ．たとえば，平衡期のある時刻に式（2.2.3）の第 1 項が 10^8 程度であったとすれば，式（2.2.3）の第 1 項をたった 0.01% だけ変化させても，σ を一定に保つには $T^{3/2}/n_B$ が $e^{10000/\mathcal{N}}$ 倍になるような変化が必要となる．そのように莫大な密度，あるいは温度の比はここでは考えないので，熱平衡状態では T^3/n_B が一定であったと結論できる．前節で見たように，この比は光子が自由に伝播しているあいだ，および光子が純粋に弾性的なトムソン散乱によってのみ相互作用しているあいだは一定である．したがって，ここで考えた平衡期の初めから現在に至るまで，この比はほぼ一定であったことになる．式（2.2.3）の積分定数 C を，平衡期のある時刻における $T^{3/2}/n_B$ の値と等しくとれば，この時期を通じて 1 バリオンあたりのエントロピーは以下のように書ける．

$$\sigma = \frac{4a_{\mathcal{B}}T^3}{3n_Bk_{\mathcal{B}}} = \frac{3.60\,n_{\gamma 0}}{n_{B0}} = 1.31\times 10^8 h^{-2}\Omega_B^{-1}. \tag{2.2.4}$$

バリオン数の保存より n_Ba^3 は一定であるから，式（2.2.3）が一定であるということは，$T \propto 1/a$ という結論に結びつく（蛇足だが，式（2.2.3）の第 1 項が 10^8 より大きいとする代わりに 10^{-8} 程度の大きさであったとすれば，熱平衡状態において一定に保たれねばならないのは第 2 項の対数であり，その場合には，非相対論的粒子が熱的進化を支配する場合に期待されるように $T \propto n_B^{2/3} \propto a^{-2}$ を得る）．

今なら，なぜ，光子と物質の熱平衡状態が終了した後でも，また光子–電子散乱の電子の反跳によるエネルギー損失のような小さな非弾性散乱の効果を考慮に入れても，温度 $T \propto 1/a$ を持つ黒体放射のスペクトルを保存するのか理解できる．光子は $\Gamma_\gamma < H$ のとき，実質的に物質とのエネルギーのやりとりをやめる（エネルギーのやりとりが「凍結」する）．ここで $H \equiv \dot{a}/a$ で，Γ_γ は個々の光子が（後ほど計算される）電子との散乱を通じてエネルギー $k_{\mathcal{B}}T$ をやりとりする反応率である．しかし，個々の電子が光子との散乱を通じてエネルギー $k_{\mathcal{B}}T$ をやりとりする反応率 Γ_e は Γ_γ に比べて $n_\gamma/n_e > 10^8$ 倍大きいから，Γ_γ が H を下回る時刻においてもまだ $\Gamma_e \gg H$ である．したがって，電子の運動エネルギーは自由膨張のときのように $1/a^2$ に比例して減少せずに，光子と熱平衡であり続ける．物質との熱平衡状態では光子の温度は $1/a$ に比例するが，前節で見たように物質との相互作用が終わっても温度は $1/a$ に比例する．したがって，これらの期間すべてに渡って電子の温度もまた $1/a$ に比例して減少し，最終散乱の時期に光子と電子間で行われる数回のエネルギーのやりとりは光子のエネルギー分布に影響しない．

2.1 節の結果によれば，光子とニュートリノのエネルギー密度に等価な質量密度と，全物質質量密度 $\rho_{M0} = \Omega_M\, \rho_{0,\mathrm{crit}}$ の現在の比は以下で与えられる．

$$\frac{\rho_{R0}}{\rho_{M0}} = \frac{\Omega_R}{\Omega_M} = 4.15 \times 10^{-5}\Omega_M^{-1} h^{-2}. \tag{2.2.5}$$

すでに見たように，光子とニュートリノのエネルギー密度は光子が自由膨張を開始する以前においても $T^4 \propto a^{-4}$ に比例して変化し，圧力を持たない物質の密度は a^{-3} に比例して変化する．したがって，その比 ρ_R/ρ_M は $1/a \propto T$ に比例して変化する．これより，光子とニュートリノのエネルギー密度は以下の温度で物質密度と等しくなり，

$$T_{\mathrm{EQ}} = \frac{T_{\gamma 0}\Omega_M}{\Omega_R} = 6.56 \times 10^4 \text{ K} \times \Omega_M h^2, \tag{2.2.6}$$

これより以前では ρ_R は ρ_M より大きかったことになる．$\Omega_M h^2 \simeq 0.15$ のとき，T_{EQ} は 10^4 K 程度である．

光子の数が電荷を持つ粒子の数よりも非常に多い限りは，衝突が光子のエネルギー**分布**を変えることはない．しかし温度が十分に高ければ，衝突によって個々の光子のエネルギーが大きく変わることがある．光子が電子と $k_{\mathcal{B}}T$ 程度の大き

さのエネルギーのやりとりをやめた時刻を求めてみよう．個々の光子が電子によって散乱される散乱率は $\Lambda_\gamma = \sigma_T n_e c$ で与えられる．ここで n_e は電子の数密度，$\sigma_T = 0.66525 \times 10^{-24}$ cm^2 はトムソン散乱（非相対論的電子による光子の弾性散乱）の散乱断面積である．3.2 節で見るように，この時期の宇宙における通常の物質質量の 76%は電離水素であり，残りはヘリウムである．ヘリウムは 20000 K 以上の温度では完全電離しているから，水素原子核 1 個あたり 1 個の電子があり，ヘリウム原子核を構成する核子 1 個あたり半個の電子があることになる．したがって核子 1 個あたりの平均の電子数は $0.76 + (1/2)0.24 = 0.88$ で与えられ，温度 T における電子の数密度は $n_e \simeq 0.88 n_B = 0.88 n_{B\,0}(T/T_{\gamma 0})^3$ で与えられる．いつものように，添字のゼロは現在の時刻を表す．式（2.1.13）を用いれば，1 個の光子が電子によって散乱される散乱率は以下の式で与えられる．

$$\Lambda_\gamma = 0.88 n_{B\,0}\left(\frac{T}{T_{\gamma\,0}}\right)^3 \sigma_T c = 1.97\times 10^{-19}\ \mathrm{s}^{-1} \times \Omega_B h^2 \left(\frac{T}{T_{\gamma\,0}}\right)^3 . \tag{2.2.7}$$

しかし，散乱率は物質と放射間のエネルギーのやりとりの効率を決めるものではない．$m_e c^2$ よりずっと低いエネルギーを持つ光子が非相対論的電子にぶつかると，光子は電子にそれ自身の運動量程度の大きさの運動量，典型的には（$c = 1$ の単位系で）$k_{\mathcal{B}} T$ を与える．したがって，光子と電子は $(k_{\mathcal{B}} T)^2/m_e$ 程度の大きさのエネルギーをやりとりする（これは式（C.20）において $\omega \approx k_{\mathcal{B}} T \ll m_e$ とした結果に合致する）．よって，ある光子 1 個と電子のあいだで $k_{\mathcal{B}} T$ 程度の大きさのエネルギーがやりとりされる率は，上記で求めた散乱率に，各散乱あたりでやりとりされるエネルギーを $k_{\mathcal{B}} T$ で割ったものを積算することで得られる．

$$\Gamma_\gamma \simeq \left(\frac{k_{\mathcal{B}} T}{m_e}\right) \Lambda_\gamma \approx 9.0 \times 10^{-29}\ \mathrm{s}^{-1}\, \Omega_B h^2 \left(\frac{T}{T_{\gamma 0}}\right)^4 . \tag{2.2.8}$$

これと宇宙の膨張率を比べる．仮に，いま興味のある時刻では宇宙のエネルギー密度が光子とニュートリノによって支配されており，物質は支配的でないとしよう．この場合，宇宙の膨張率は以下で与えられる．

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_R T^4 / T_{\gamma 0}^4} = 2.1 \times 10^{-20}\ \mathrm{s}^{-1} \left(\frac{T}{T_{\gamma 0}}\right)^2 . \tag{2.2.9}$$

したがって Γ_γ は，温度が以下の値を下回るまで H より大きかったことになる．

$$T_{\text{凍結}} = 1.5 \times 10^4\, \mathrm{K} \left(\Omega_B h^2\right)^{-1/2} . \tag{2.2.10}$$

$\Omega_B h^2 \simeq 0.02$ を代入すると，約 10^5 K が得られる（式（2.2.6）と比べてみれば，たとえば $\Omega_M h^2 \simeq 0.15$，$\Omega_B h^2 \simeq 0.02$ といったもっともらしい値の $\Omega_M h^2$ と $\Omega_B h^2$ に対して $T_{凍結} > T_{\mathrm{EQ}}$ であることがわかる．したがって，我々が初めに仮定したように，確かに式（2.2.10）で与えられる温度では宇宙の膨張率は放射によって支配されている）．

温度が約 10^5 K 以下になると光子と電子間のエネルギーのやりとりはなくなるが，式（2.2.7）で与えられる弾性散乱の散乱率はこの温度でもまだ H の 10^5 倍程度大きい．もし式（2.2.7）がこの後もずっと有効であれば，温度がもっと低くなっても Λ_γ は H よりも大きいままであろう．温度が $3\ \mathrm{K} \ll T \ll 10^4$ K であるあいだ宇宙は物質に支配されており，そのときの膨張率は以下で与えられる．

$$H = H_0\sqrt{\Omega_M T^3/T_{\gamma 0}^3} = 3.3 \times 10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1}\sqrt{\Omega_M h^2}\left(\frac{T}{T_{\gamma 0}}\right)^{3/2}.$$

これが式（2.2.7）で与えられる散乱率と等しくなる温度は $T \simeq 18\ \mathrm{K}\ (\Omega_M h^2)^{1/3}/(\Omega_B h^2)^{2/3}$ で，$\Omega_M h^2 = 0.15$ と $\Omega_B h^2 = 0.02$ を代入すれば約 130 K を得る．したがってこの温度になるまでは，個々の光子は $a(t)$ が倍になるたびに電子によって何度も散乱されたことになるのだが，実際にはそうはならない．なぜなら，温度が十分低くなり，電子と原子核が集まって中性原子となると，弾性散乱率 Λ_γ は式（2.2.7）で与えられる値よりもぐっと小さくなるからだ．次節で見るように，この現象が起こるのは温度が約 3000 K の頃であり，これが光子と電子の散乱の時期の終わりとなる．

2.3　再結合と最終散乱

2.2 節では，温度が約 10^5 K の頃に光子と電子間の効率の良いエネルギーのやりとりが終わる（凍結する）のを見た．その後も光子は自由電子に散乱され続けたが，エネルギーを大きく得たり失ったりすることはなかった．このような光子と電子の散乱は自由電子が水素原子とヘリウム原子に取り込まれた時点で終わりを迎え，**再結合**と呼ばれている[*1]．それでは，再結合がいつ起こるのかを見てみよう．

計算を始める時刻として，陽子，電子，水素原子，およびヘリウム原子が放射

[*1] この時刻以前には電子と陽子は一度も原子として結合していないのだから,「再結合」の「再」という言葉は混乱を招くかもしれない．しかし,「再結合」という言葉は天体物理学全般において，電子が原子に取り込まれる物理過程を表すのに使われる標準的な言葉である．

の温度と同じ温度で熱平衡状態になるような十分早期の時刻を選ぼう．温度 T において平衡状態にある，非相対論的かつ縮退していないある粒子 i の数密度はマクスウェル–ボルツマンの公式で与えられる．

$$n_i = g_i\,(2\pi\hbar)^{-3} e^{\mu_i/k_{\mathcal{B}}T} \int d^3q\ \exp\left[-\left(m_i + \frac{q^2}{2m_i}\right)\Big/ k_{\mathcal{B}}T\right], \tag{2.3.1}$$

ここで m_i は粒子 i の質量，g_i は粒子 i の取り得るスピン状態の数，そして μ_i は粒子 i の**化学ポテンシャル**として知られるガスの性質を表す（相対論的効果や縮退の効果を含む式（2.3.1）の一般化は次章で与える）．化学ポテンシャルは，ガス中で素早く生じる反応では保存するという性質を持ち，この性質のおかげで上記の公式が有用なものとなる．今の場合，考える粒子は陽子，電子，そしてあらゆる束縛状態にある水素原子であり，それぞれに対して i を p，e，$1s$，$2s$，$2p$ 等と書くことにする（すでに述べたように初期宇宙における通常の物質質量の24%はヘリウム原子核の形をとっているが，ヘリウム原子は水素原子よりも強く束縛されているため，いま考えている時刻，つまり $T < 4400$ K ではほぼすべてのヘリウムは中性原子の形をとり，以下の議論に影響しない）．電子と陽子はスピン 1/2 を持つから $g_p = g_e = 2$ であるが，$1s$ 基底状態の水素原子はスピン 0 と 1 を持つ二つの微細構造があるため $g_{1s} = 1 + 3 = 4$ である．

さて，再結合および電離反応 $p + e \rightleftharpoons H_{1s}$ は励起状態間の放射遷移によって素早く起こるため，化学ポテンシャルは以下の式を満たす．

$$\mu_p + \mu_e = \mu_{1s}. \tag{2.3.2}$$

（光子は $e + p \rightleftharpoons e + p + \gamma$ のような反応において自由に生成されたり破壊されたりするので，光子の化学ポテンシャルはゼロである．）以下の積分，

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int d^3p\ \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_{\mathcal{B}}T}\right) = \left(\frac{mk_{\mathcal{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$

を用いれば，式（2.3.2）で与えられる保存則から以下の結果が導かれる．

$$\frac{n_{1s}}{n_p n_e} = \left(\frac{m_e k_{\mathcal{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{-3/2} \exp(B_1/k_{\mathcal{B}}T), \tag{2.3.3}$$

ここで $B_1 \equiv m_p + m_e - m_H$ =13.6 eV は水素原子の $1s$ 基底状態の束縛エネルギーである（ここで，指数関数を除き，水素原子と陽子の質量の違いは無視した）．また，宇宙の中性条件，すなわち物質の全電荷の和がゼロであるという要請から，

$$n_e = n_p\,. \tag{2.3.4}$$

である．さらに，平衡状態では励起状態にある水素原子の数密度は基底状態の数密度よりも $\exp(-\Delta E/k_{\mathcal{B}}T)$ 程度の大きさだけ小さい．ΔE は励起エネルギーで，水素の $n=1$ 状態と $n=2$ 状態のエネルギー差 10.2 eV と等しいかそれ以上でなくてはならない（平衡状態では光子の放出，あるいは吸収によって異なる状態間の遷移が素早く行われるため，励起状態と基底状態は同じ化学ポテンシャルを持つ）．温度が 4200 K より低い場合，この指数因子は 6×10^{-13} より小さい値を持つので，熱平衡が保たれる限りは良い近似で励起状態にある水素原子の存在を無視できる．3.2 節で見るように，再結合の時刻での通常の物質質量の 76%は中性水素あるいは電離水素であるから，

$$n_p + n_{1s} = 0.76\,n_B \tag{2.3.5}$$

のように書ける．ここで，n_B はバリオン（いま考えている温度では中性子と陽子を指す）の数密度である．したがって，$X\equiv n_p/(n_p+n_{1s})$ で定義される水素の電離度は以下の**サハの式**を満たす．

$$X(1+SX) = 1. \tag{2.3.6}$$

S は以下で定義される．

$$S \equiv \frac{(n_p+n_{1s})n_{1s}}{n_p^2} = 0.76\,n_B\left(\frac{m_e k_{\mathcal{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{-3/2}\exp(B_1/k_{\mathcal{B}}T). \tag{2.3.7}$$

平衡状態における電離度は温度が $B_1/k_{\mathcal{B}} = 157894$ K より低くなれば小さくなると思うかもしれないが，たとえ平衡状態にあっても再結合の時期はそれに比べて随分と遅れる．なぜなら，式（2.3.7）の指数関数にかかる係数の値が小さいからである．$n_B = n_{B\,0}(T/T_{\gamma0})^3$ と式（2.1.13）で与えられる $n_{B\,0}$ を用いれば，

$$S = 1.747\times10^{-22}\,e^{157894/T}\,T^{3/2}\,\Omega_B\,h^2 \tag{2.3.8}$$

を得る．ここで h は再び 100 km s^{-1} Mpc^{-1} を単位とするハッブル定数で，T はケルビンを単位とする温度である．この関数は，その数値が 1 程度となる温度近傍で非常に鋭く変化するため，表 2.1 に示すようにサハの式は非常にはっきりとした再結合の温度を与える．表 2.1 より，温度が $T=4200$ K から $T=3000$ K に減少すると，平衡状態における電離度が 97%から 1%以下へ減少することがわ

表 2.1 平衡状態における水素の電離度 X を様々な温度 T と $\Omega_B h^2$ の値に対して示す.

T (K)	$\Omega_B h^2 = 0.01$	$\Omega_B h^2 = 0.02$	$\Omega_B h^2 = 0.03$
4500	0.999	0.998	0.997
4200	0.990	0.981	0.971
4000	0.945	0.900	0.863
3800	0.747	0.634	0.565
3600	0.383	0.290	0.244
3400	0.131	0.094	0.078
3200	0.0337	0.0240	0.0196
3000	0.00693	0.00491	0.00401
2800	0.00112	0.00079	0.00065
2.725	2.8×10^{-12571}	2.0×10^{-12571}	1.6×10^{-12571}

かる.

これは，電離度が急速に減少し始める温度をある程度正しく与えるが，詳細に関しては正しくない．なぜなら，電離度が小さくなると平衡状態が保たれなくなるからである．自由電子が陽子に捕獲され，励起状態を経ることなくそのまま基底状態の水素原子になったとしよう．このときに放出される光子のエネルギーは他の水素原子を電離するのに十分なエネルギーを持っているため，この過程では電離度は減少しない．同様に，主量子数 $n \geqq 3$ を持つ軌道にある電子が基底状態に落ち込む際に放出される光子は，他の水素原子の基底状態にある電子を $n=2$ の励起状態に押し上げるのに十分なエネルギーを持っている．したがって，この過程でも基底状態にある電子の数は増えない．基底状態にある水素原子は，典型的に以下の過程で生成される．まず $e + p \to \mathrm{H}^* + \gamma$ の反応で励起状態 H^* を作り，放射遷移を繰り返して $n=2$ の励起状態まで到達する．$2p$ 励起状態から $1s$ 基底状態への最後の遷移は 1 個のライマン α 光子を放出することで達成されるが，この過程は，自由電子や $n=2$ より高い励起状態の電子が基底状態へそのまま遷移するのを妨げられたのと同じ理由で妨げられる．ライマン α 光子は単に熱的背景放射に溶け込むわけではなく，基底状態にある他の水素原子を最初の励起状態に共鳴励起できる大きな断面積を持っている．励起させられた水素原子は，（平衡状態では励起状態にある水素原子の数が小さいために）多くの場合そこから

電離させられてしまう．しかし宇宙論的状況下では，この $2p \to 1s$ 過程による基底状態の生成が完全に起こらないとはいえない．なぜなら，ある水素原子から放出されたライマン α 光子は，他の水素原子を基底状態から $2p$ 状態に励起するのにちょうどぴったりのエネルギーしか持たないため，もし放出後すぐさま他の水素原子を励起できなければ，宇宙論的赤方偏移によってそのエネルギーは共鳴線の外側に移され，その後はもはや基底状態の水素原子を励起するのに十分なエネルギーを持たなくなるのだ．このように $2p$ 状態から放射遷移によって基底状態に移るのは非常に効率が悪いため，$2s$ 状態の 2 光子遷移のように，同様に効率の悪い基底状態への遷移経路も考えねばならない．水素原子の最初の励起状態のもう一方である $2s$ 状態は 2 つの光子を放出してのみ基底状態へ遷移できるが，個々の光子はエネルギーが低いため，基底状態にある他の水素原子を励起できない．電離度が小さくなるとこれらの反応率が宇宙膨張率を下回り，電離度が熱平衡状態の場合ほど速く減少できなくなるのである[*2]．

これは込み入った仕事ではあるが，再結合過程の大枠を理解するのはさほど難しくない．我々は以下の近似を用いる．

1．水素原子間の衝突，および水素原子のエネルギー準位間の放射遷移は十分速く起こるものとし，したがって $1s$ 基底状態を除く水素原子の全エネルギー準位は放射の温度 T における平衡状態にある．すでに述べたように，$1s$ 基底状態はより遅い，効率の悪い過程によってのみ到達しうる． この近似により，主量子数 n（ただし $n > 1$）と角運動量 ℓ を持つエネルギー準位にある水素原子の数密度は，たとえば $2s$ 状態のような他のエネルギー準位にある水素原子の数密度と以下の式で関係づけられる[*3]．

$$n_{n\ell} = (2\ell + 1)\, n_{2s} \exp\Big((B_n - B_2)/k_{\mathcal{B}}T\Big), \tag{2.3.9}$$

[*2] このトピックに関する古典的な論文は，P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.*, **153**, 1 (1968)，および Ya. B. Zel'dovich, V. G. Kurt, R. A. Sunyaev, *Soviet Physics JETP*, **28**, 146 (1969) である．本書の執筆段階において，私の知る上で最も徹底した解析をしたのは，S. Seager, D. D. Sasselov, D. Scott, *Astrophys. J.*, **523**, L1 (1999); *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **128**, 407 (2000) [astro-ph/9909275] である．その後さらに遷移数を追加し，誘導放射も考慮に入れた結果，1%程度の大きさの補正が，V. K. Dubrovich, S. I. Grachev, *Astron. Lett.*, **31**, 359 (2005) [astro-ph/051672]; J. Chluba, R. A. Sunyaev, *Astron. Astrophys.*, **446**, 39 (2006) [astro-ph/0508144]; W. Y. Wong, D. Scott, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **375**, 1441 (2007) [astro-ph/0610691] によって見つけられた．宇宙マイクロ波背景放射の観測を用いることでこれらの不定性を解決できる可能性が，A. Lewis, J. Weller, R. Battye, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **373**, 561 (2006) [astro-ph/0606552] によって論じられている．単純化のため，ここではピーブルスが用いたのと同じ近似を用いているが，手法としてはより直接的で正当化が容易だと思われる Seager *et al.* の「脱出確率」法を用いることにする．

ここで B_n は主量子数 n を持つ状態の束縛エネルギーである[*4].

2. $1s$ 状態にある水素原子数の正味の変化率は，$2s$ と $2p$ 状態から $1s$ 状態に達する放射遷移率より $1s$ 状態からこれらの状態への励起率を差し引いたもので与えられる．上記の議論に従い，$1s$ 基底状態に達する他のすべての過程は，その際に放射される光子によって他の水素原子が再電離，あるいは再励起されるため，$1s$ 状態にある水素原子数の正味の変化率に寄与しないとする． 再結合は電子と陽子の衝突によって生じるから，共動体積 a^3 中の自由電子の数 $n_e a^3$ を，$\alpha(T) n_p n_e a^3$ で与えられる率で減少させる．この率は $n_p = n_e$ と $n_e a^3$ に比例し，その係数 $\alpha(T)$ は n_e や a によらず温度のみに依存する（ここで，基底状態に直接達する再結合率は，再結合の際に放射される光子が他の水素原子を電離して打ち消されるので $\alpha(t)$ に含めない．このような $\alpha(t)$ は天体物理学において「ケース B（case B）の再結合係数」と呼ばれるものである）．また，基底状態に達する再結合を打ち消すような基底状態からの電離を除けば，$n_e a^3$ を増やすように働く水素原子の励起状態からの電離率は $n_{n\ell} a^3$（ただし $n > 1$）に比例する項の和で与えられ，その比例係数は温度のみに依存する．式（2.3.9）により，$n > 1$ を持つ $n_{n\ell}$ はすべて n_{2s} に比例し，その比例係数は温度のみに依存するから，電離は共動体積 a^3 中の電子の数を $\beta(T) n_{2s} a^3$ で与えられる率で増加させる．ここで $\beta(T)$ は a，n_e，$n_{n\ell}$ によらず，温度のみに依存する関数である．これらの反応率を集めれば，以下の式を得る．

$$\frac{d}{dt}\left(n_e a^3\right) = -\alpha n_e^2 a^3 + \beta\, n_{2s} a^3.$$

両辺を定数 na^3（ここで $n \equiv n_p + n_H = n_p + \sum_{n\ell} n_{n\ell} = 0.76 n_B$）で割れば，以下の式を得る．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{n_e}{n}\right) = -\frac{\alpha\, n_e^2}{n} + \frac{\beta n_{2s}}{n}. \tag{2.3.10}$$

さて，平衡状態ではこれはゼロにならなければならない．n_e^2 と n_{2s} との間は（$e + p \rightleftharpoons 2s$ の遷移が素早く起こるため）式（2.3.3）の代わりに，

---

*3 （124 ページ）この公式は，非常に高い励起状態にある水素原子には適用できない．そのような状態は非常に大きな半径と小さな束縛エネルギーを持つため，自由粒子として扱えないのである．この件に関しては，たとえば D. Mihalas, *Stellar Atmospheres*, 2nd edition, Freeman (1978) を見よ．

*4 微細構造，超微細構造，およびラム・シフトは無視した．これらの効果は束縛エネルギーに ℓ と（スピンを含む）全角運動量 j に依存する非常に小さな変化を与える．

$$\frac{n_{2s}}{n_e^2} = \left(\frac{m_e k_{\mathcal{B}} T}{2\pi\hbar^2}\right)^{-3/2} \exp(B_2/k_{\mathcal{B}}T)$$

が成り立つから，式（2.3.10）の係数は以下のように関係づけられる．

$$\beta/\alpha = \left(\frac{n_e^2}{n_{2s}}\right)_{\text{平衡状態}} = \left(\frac{m_e k_{\mathcal{B}} T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp(-B_2/k_{\mathcal{B}}T). \tag{2.3.11}$$

式（2.3.10）が有用であるためには，n_{2s} を，陽子と水素原子を合わせた全数密度 n に関係づける必要がある．

3. 共動体積 $1/n$ 中にある励起状態の全水素原子の個数は個々の放射過程と比べて非常にゆっくりと変化するから，励起状態にある水素原子数が水素の再結合や再電離によって正味増加する量は，$1s$ 状態を含む遷移によって正味減少する量とつりあう． つまり，

$$\alpha n_e^2 - \beta n_{2s} = (\Gamma_{2s} + 3P\Gamma_{2p})n_{2s} - \mathcal{E} n_{1s} \tag{2.3.12}$$

が成り立つ．ここで，Γ_{2s} と Γ_{2p} はそれぞれ $2s \to 1s + \gamma + \gamma$ と $2p \to 1s + \gamma$ の放射遷移率[*5]，P は $2p \to 1s + \gamma$ で放射されたライマン α 光子が $1s$ 状態にある他の水素原子を $2p$ 状態に励起せずに無限遠方に到達する確率（以下で計算する）で，$\mathcal{E}$ は $1s$ 状態にある水素原子が $2s$ や $2p$ 状態に励起される率である．ただし，$2p \to 1s + \gamma$ で放出されるライマン α 光子による $2p$ 状態への励起は P で考慮されているため，$\mathcal{E}$ には含めない（式（2.3.12）中の係数 3 は，式（2.3.9）から得られる $n_{2p} = 3n_{2s}$ に起因する）．これより，必要としていた n_{2s} の式を得る．

$$n_{2s} = \frac{\alpha n_e^2 + \mathcal{E} n_{1s}}{\Gamma_{2s} + 3P\Gamma_{2p} + \beta}. \tag{2.3.13}$$

いま考えている温度は $T \ll (B_2 - B_3)/k_{\mathcal{B}} = 21900$ K であるから，式（2.3.9）より $n > 2$ を持つすべての $n_{n\ell}$ が n_{2s} に比べて圧倒的に小さいことがわかる．したがって，非常に良い近似で，水素原子の全数密度は以下の式で与えられる．

$$n_H = n_{1s} + n_{2s} + n_{2p} = n_{1s} + 4n_{2s}. \tag{2.3.14}$$

これより，式（2.3.13）から n_{1s} を消去して n_H に置き換えれば，

$$n_{2s} = \frac{\alpha n_e^2 + \mathcal{E} n_H}{\Gamma_{2s} + 3P\Gamma_{2p} + \beta + 4\mathcal{E}} \tag{2.3.15}$$

[*5] $2p \to 1s + \gamma + \gamma$ の遷移率は，$2s \to 1s + \gamma + \gamma$ よりも非常に遅いために無視する．

を得る．さて，平衡状態では $1s$ 状態にある水素原子数は一定であるから，（基底状態にある水素原子数密度の正味の増加率を与える）式（2.3.12）の右辺の係数の比は以下で与えられねばならない．

$$\frac{\mathcal{E}}{\Gamma_{2s}+3P\Gamma_{2p}} = \left(\frac{n_{2s}}{n_{1s}}\right)_{\text{平衡状態}} = \exp\Big(-(B_1-B_2)/k_{\mathcal{B}}T\Big). \tag{2.3.16}$$

式（2.3.10）に式（2.3.15）と式（2.3.16）を代入すれば，反応率の式は以下のようにより有益な形に書ける．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{n_e}{n}\right) = &\frac{\Gamma_{2s}+3P\Gamma_{2p}}{(\Gamma_{2s}+3P\Gamma_{2p})\Big[1+4\exp\Big(-(B_1-B_2)/k_{\mathcal{B}}T\Big)\Big]+\beta} \\ &\times\left(-\Big[1+4\exp\Big(-(B_1-B_2)/k_{\mathcal{B}}T\Big)\Big]\frac{\alpha n_e^2}{n}\right. \\ &\left.+\exp\Big(-(B_1-B_2)/k_{\mathcal{B}}T\Big)\frac{\beta n_H}{n}\right).\end{aligned}$$

いま興味のある温度では，$1+4\exp(-(B_1-B_2)/k_{\mathcal{B}}T)$ は 1 に置き換えて良い．式（2.3.11），および電離度の定義 $X \equiv n_e/n = n_p/n = 1-n_H/n$ を用いれば，ようやく電離度を与える微分方程式，

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{\Gamma_{2s}+3P\Gamma_{2p}}{\Gamma_{2s}+3P\Gamma_{2p}+\beta}\right)\alpha\, n\left(-X^2+S^{-1}(1-X)\right) \tag{2.3.17}$$

を得る．ここで $S(T)$ はサハの式に登場した関数で，式（2.3.7）で与えられる．もし温度が一定であれば，サハの式（2.3.6）のいかなる解もこの微分方程式を満たすことに着目しよう．実際には，X はサハの式で与えられる値よりも常に大きく，式（2.3.17）は単調的に減少する電離度を与える．式（2.3.17）における最初の因子は，$2s$ および $2p$ 状態から基底状態への遷移が水素原子の再電離よりも遅いときには再結合の進行が抑制されることを表している．

残された仕事は，ライマン α 光子の脱出確率 P の計算である．これは一般に，

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \mathcal{P}(\omega)\exp\left[-\int_t^{\infty} dt'\, n_{1s}(t')\, c\,\sigma\Big(\omega a(t)/a(t')\Big)\right] \tag{2.3.18}$$

で与えられる．$\mathcal{P}(\omega)\, d\omega$ は $2p \to 1s$ の遷移で放出された光子のエネルギーが $\hbar\omega$ と $\hbar(\omega+d\omega)$ の間にある確率で，$\int \mathcal{P}(\omega)d\omega = 1$ となるように規格化されている．$\sigma(\omega)$ はエネルギー $\hbar\omega$ を持つ光子によって励起 $1s \to 2p$ が起こる確率を決める反応断面積である．因子 $a(t)/a(t')$ は光子の宇宙論的赤方偏移から生じる．この反

応断面積はブライト–ウィグナーの公式[*6],

$$\sigma(\omega) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2\pi^2 \Gamma_{2p}}{k_\alpha^2}\right)\mathcal{P}(\omega) \tag{2.3.19}$$

で与えられ，k_α は $2p \to 1s$ の遷移で放出されるライマン α 光子の平均波数 $(B_1 - B_2)/\hbar c$ である．確率密度 $\mathcal{P}(\omega)$ は，

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{\Gamma_{2p}}{2\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_\alpha)^2 + \Gamma_{2p}^2/4} \tag{2.3.20}$$

で与えられ，ω_α は波数 k_α に対応する角周波数 ck_α である．

さて，もし光子が捕獲されるならば，その捕獲時間は宇宙膨張の典型的な時間よりもずっと短いのだから，式（2.3.18）の密度 $n_{1s}(t')$ を $n_{1s}(t)$ と等しいと置ける．反応断面積 $\sigma(\omega)$ は ω の微小変化に対して急激に変化するため $a(t)$ の時間依存性を無視することはできないが，t' に渡る積分で宇宙膨張率は定数として良い．したがって $a(t)/a(t') = 1 - H(t)(t'-t)$ と近似でき，$H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ である．すると式（2.3.18）の指数関数の積分変数を t' から $\omega' = (1 - H(t)(t'-t))\omega$ に変換するのが便利であり，式（2.3.18）は，

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \mathcal{P}(\omega) \exp\left[-\frac{3\pi^2 \Gamma_{2p}\, n_{1s}(t)\, c}{\omega\, H(t)\, k_\alpha^2}\int_{-\infty}^{\omega} d\omega'\ \mathcal{P}(\omega')\right] \tag{2.3.21}$$

と書き換えられる．関数 $\mathcal{P}(\omega)$ は ω が ω_α に非常に近くない限り無視できるから，指数関数の引数における $1/\omega$ の ω を ω_α に置き換えることができる（ただし ω' に渡る積分の上限値の ω は ω_α に置き換えない．なぜなら，この積分は ω_α 近傍の ω に対してゼロから 1 に急激に増加するからである）．ω に渡る積分は今や自明に実行でき，以下の結果を与える．

$$P(t) = F\left(\frac{3\pi^2 \Gamma_{2p}\, n_{1s}(t)\, c}{\omega_\alpha\, H(t)\, k_\alpha^2}\right), \tag{2.3.22}$$

ここで，

$$F(x) \equiv \left(1 - e^{-x}\right)/x \tag{2.3.23}$$

[*6] たとえば S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press (1995, 1996, 2000)［これより QTF として参照する］第 1 巻，式（3.8.16）（邦訳『場の量子論 1 巻』青山秀明・有末宏明訳，吉岡書店（1997），式（3.8.16））を見よ．因子 3/2 は $2p$ 状態の取り得る角運動量状態の数 $2\ell + 1 = 3$ と光子の取り得るヘリシティ状態の数 2 から生じる．電子と陽子のスピンを考慮すれば分子は 12 で分母は 8 となるが，約分すれば比は同じく 3/2 である．

とする．ライマン α 遷移率[*7]は $\Gamma_{2p} = 4.699 \times 10^8\,\mathrm{s}^{-1}$ であるから，式（2.3.22）の関数 $F(x)$ の引数は非常に大きい．たとえば，もし $\Omega_M h^2 = 0.15$ と $\Omega_B h^2 = 0.01$ を代入すれば，$T < 6000$ K において引数 x は 10 より大きい．したがって，ここで興味のある温度に対しては式（2.3.23）の指数関数を無視できて，

$$P = \frac{\omega_\alpha\, H\, k_\alpha^2}{3\pi^2 \Gamma_{2p}\, n_{1s}\, c} = \frac{8\pi\, H}{3\lambda_\alpha^3 \Gamma_{2p}\, n_{1s}} \tag{2.3.24}$$

を得る．ここで $\lambda_\alpha = 1215.682 \times 10^{-8}$ cm はライマン α 光子の波長で，引数 t は省いた．この結果より，反応率の式（2.3.17）に現れた量 $3P\Gamma_{2p}$ が Γ_{2p} に依存せず，以下で与えられることがわかる．

$$3P\Gamma_{2p} = \frac{8\pi\, H}{\lambda_\alpha^3\, n_{1s}}. \tag{2.3.25}$$

P に関するこの結果を用いれば，式（2.3.17）と，ピーブルス [*2] によって異なる手法で得られた反応率の式が等価であることが示せる．さて，この方程式において，いま興味ある温度，すなわち $(B_1 - B_2)/k_{\mathcal{B}} = 118420$ K よりもずっと低い温度では n_{1s}/n_{2s} の値は熱平衡時の値よりは小さいものの 1 よりはずっと大きいので，n_{1s} を近似的に $n_H = (1-X)n$ に置き換えよう．また，独立変数として時間の代わりに温度を用いると，以下の式が使える．

$$\frac{dt}{dT} = -\frac{1}{HT}. \tag{2.3.26}$$

すると，反応率の式（2.3.17）は以下のように書き換わる．

$$\frac{dX}{dT} = \frac{\alpha n}{HT}\left(1 + \frac{\beta}{\Gamma_{2s} + 8\pi H/\lambda_\alpha^3 n(1-X)}\right)^{-1}\left[X^2 - (1-X)/S\right]. \tag{2.3.27}$$

これより具体的に数値を入れてみよう．宇宙の膨張率を計算する際には非相対論的物質のエネルギー密度に加えニュートリノと光子のエネルギー密度も含めなければならない．ニュートリノのエネルギー密度の寄与が重要な時期にはニュートリノの質量は無視できる．また，温度 $T > 30$ K では真空のエネルギーも無視して良いから，宇宙膨張率として，

$$H = H_0 \left[\Omega_M \left(\frac{T}{T_{\gamma 0}}\right)^3 + \Omega_R \left(\frac{T}{T_{\gamma 0}}\right)^4\right]^{1/2}$$

[*7] W. L. Wiese, M. W. Smith, R. M. Glennon, *Atomic Transition Probabilities*, Vol. I, National Standard Reference Data Series NBS **4** (1966).

$$= 7.204 \times 10^{-19}\, T^{3/2} \sqrt{\Omega_M h^2 + 1.523 \times 10^{-5} T}\, \mathrm{s}^{-1} \tag{2.3.28}$$

を得る．ここで再び T の数値はケルビン単位で表す．電離水素と中性水素を足した数密度は以下で与えられる．

$$n = 0.76 \times \frac{3H_0^2 \Omega_B}{8\pi G m_p} \left(\frac{T}{T_{\gamma 0}}\right)^3 = 4.218 \times 10^{-7}\, \Omega_B h^2\, T^3\, \mathrm{cm}^{-3}. \tag{2.3.29}$$

$2s$ 状態の 2 光子遷移率は以下で与えられる[*8]．

$$\Gamma_{2s} = 8.22458\, \mathrm{s}^{-1}. \tag{2.3.30}$$

ピーブルスが用いた，電子の再結合率に現れる陽子の数密度の係数[*9]は，

$$\alpha = 2.84 \times 10^{-11} T^{-1/2}\, \mathrm{cm}^3\, \mathrm{s}^{-1}$$

である．ここで因子 $T^{-1/2}$ は $e + p \to H + \gamma$ のような発熱反応の断面積に一般に現れる因子 (速度)$^{-1}$ から期待されるものである[*10]．実際には α は，単なる電子捕獲よりもずっと複雑な反応の連鎖も含む．たとえば $2s$ と $2p$ 状態への放射遷移の連鎖がそうであり，したがって α はもっと複雑な温度依存性を持つ．$2s$ と $2p$ 状態への実効的な再結合率の様々な数値計算は，以下の単純な式によって記述できる[*11]．

$$\alpha = \frac{1.4377 \times 10^{-10}\, T^{-0.6166}\, \mathrm{cm}^3\, \mathrm{s}^{-1}}{1 + 5.085 \times 10^{-3}\, T^{0.5300}}. \tag{2.3.31}$$

β の値は式（2.3.11）を用いて α で書くことができる．

$$\beta = \left(\frac{m_e k_{\mathcal{B}} T}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2} \exp(-B_2/k_{\mathcal{B}} T)\, \alpha = 2.4147 \times 10^{15}\, \mathrm{cm}^{-3}\, T^{3/2}\, e^{-39474/T} \alpha. \tag{2.3.32}$$

最後に，関数 $S[T]$ は式（2.3.8）で与えられる．

式（2.3.28）から式（2.3.32）まで（および $S[T]$ の式（2.3.8））を微分方程式

[*8] S. P. Goldman, *Phys. Rev.*, **A40**, 1185 (1989). ピーブルスは，L. Spitzer, J. L. Greenstein, *Astrophys. J.*, **114**, 407 (1951) で早期に与えられていた値 $8.227\,\mathrm{s}^{-1}$ を用いた．

[*9] W. J. Boardman, *Astrophys. J. Suppl.*, **9**, 185 (1964).

[*10] たとえば，QTF 第 1 巻 p.157（邦訳『場の量子論 1 巻』p.215）を見よ．

[*11] D. Péquignot, P. Petijean, C. Boisson, *Astron. Astrophys.*, **251**, 680 (1991). この式は，S. Seager, D. D. Sasselov, D. Scott, *Astrophys. J.*, **523**, L1 (1999) によって推奨されている，全体にかかる「誤差修正因子」1.14 を含んでいる．式（2.3.31）は，D. G. Hummer, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **268**, 109 (1994) によるその後の計算結果とも合致する．

表 2.2　式 (2.3.27) から計算した水素の電離度 X，および式 (2.3.26) から計算した温度が 10^6 °K から T まで下がるのに要する時間 t を示す．4 列目から 6 列目では $\Omega_M h^2 = 0.15$ を固定し，$\Omega_B h^2$ を様々に変えて計算した X の結果を示す．最後の列では，7.2 節においてマイクロ波背景放射異方性の解析的計算を数値計算と比較する際に用いるパラメータ $\Omega_B h^2 = 0.02238$，$\Omega_M h^2 = 0.13229$ に対して得られた X の結果を示す．

z	T(K)	t (年)	$X_{\Omega_B h^2=0.01}$	$X_{\Omega_B h^2=0.02}$	$X_{\Omega_B h^2=0.03}$	$X_{7.2\text{ 節}}$
1550	4226	202600	0.992	0.984	0.977	0.982
1500	4090	213200	0.976	0.958	0.943	0.954
1450	3954	225900	0.935	0.902	0.878	0.895
1400	3818	239800	0.861	0.815	0.780	0.805
1350	3681	255200	0.759	0.703	0.659	0.690
1300	3545	272000	0.645	0.580	0.529	0.564
1250	3409	290600	0.526	0.456	0.402	0.437
1200	3273	311300	0.409	0.339	0.289	0.321
1150	3136	334600	0.299	0.236	0.194	0.220
1100	3000	360400	0.205	0.154	0.122	0.142
1050	2864	389600	0.129	0.0928	0.0721	0.0846
1000	2728	422600	0.0752	0.0520	0.0396	0.0470
950	2591	460500	0.0405	0.0270	0.0203	0.0243
900	2455	503600	0.0210	0.0136	0.0101	0.0121
800	2183	611400	0.00662	0.00387	0.00276	0.00339
700	1910	761300	0.00319	0.00174	0.00120	0.00150
600	1638	977700	0.00203	0.00107	0.000731	0.00920
500	1365	1.312×10^6	0.00147	0.000762	0.000517	0.000653
400	1093	1.872×10^6	0.00114	0.000585	0.000395	0.000499
250	684	3.922×10^6	0.000829	0.000423	0.000285	0.000361
100	275	1.604×10^7	0.000632	0.000321	0.000216	0.000273
50	139	4.535×10^7	0.000579	0.000294	0.000197	0.000250
10	30.0	4.568×10^8	0.000537	0.000272	0.000183	0.000231

(2.3.27) に代入して解いた $X[T]$ の値[*12]を，$\Omega_M h^2 = 0.15$ といくつかの $\Omega_B h^2$ に対して計算した結果を表 2.2 に与える．計算を開始する温度 $T = 4226$ K（すなわち $z = 1550$）で初期条件として熱平衡のサハの式 (2.3.6) の解 $X[T]$ を用いた．この初期温度は熱平衡が良い近似となるのに十分高温（なぜならこの温度での X の平衡値は 1 に非常に近く，真の値は 1 と平衡値の間になければならないから）である一方，電離ヘリウムがほとんどなくなるのに十分低温である（ほぼすべてのヘリウムは温度が 20000 K 以下に下がるまでは完全電離しているが，温度が 4400 K に下がるまでは相当数の 1 階電離ヘリウムが存在する）．実際の $X[4226]$ の値は平衡値よりもわずかに大きいが，$X[4226]$ の値を少量だけ，たとえば $\Omega_B h^2 = 0.02$ の場合は 0.984 から 0.99 まで増やせば，有効数字 3 桁の範囲で低温での結果には影響しない．

表 2.1 と表 2.2 を比べると，ここで選んだような小さい値の $\Omega_B h^2$ に対しては，平衡時の電離度が 1 より目立って小さくなるとサハの式が良い近似でなくなってしまうことがわかる．特に，平衡状態の電離度は温度が 2000 K 以下になるとほぼゼロまで落ちてしまうのに対し，式 (2.3.27) から計算された電離度は低い温度においても小さいがゼロでない漸近値に落ち着く．これは自由な陽子と電子の衝突がどんどん稀になるため起こる現象である．このようにして残った電離度は，宇宙最初の星形成で重要な役割を果たしたと考えられている．

現在好まれる宇宙論パラメータに対して式 (2.3.17) から得られる電離度を図 2.2 に示す（式 (2.3.17) で無視した）ヘリウムの電離から生じる電子の寄与が重要となる温度 $T > 4300$ K を除くと，この図中において我々の計算結果とシーガー，サセロフ，スコットによるより綿密な計算の結果 [*2] は区別できないほど近い．

電離度に関するこれらの計算結果の最も重要な応用例は，**不透明度** $\mathcal{O}(T)$，すなわち温度 T の時刻 $t(T)$ にある光子が現在までに少なくとももう一回散乱する確率，の計算であり，それは以下で与えられる．

$$\mathcal{O}(T) = 1 - \exp\left[-\int_{t(T)}^{t_0} c\,\sigma_T\, n_e(t)\, dt\right]. \tag{2.3.33}$$

温度が低いときには指数の積分が小さいため $\mathcal{O}(T)$ はほぼゼロだが，温度が上昇するにつれて積分が大きくなり $\mathcal{O}(T)$ は 1 に近づく．

[*12] これらの数値計算を行ってくれたデュエイン・ダイカスに感謝する．計算は $z = 10$ で止めたが，それは $z = 10$ 以降では第一世代の星によって水素が電離されてしまうのと，宇宙の膨張率が真空のエネルギーに影響されてしまうためである．

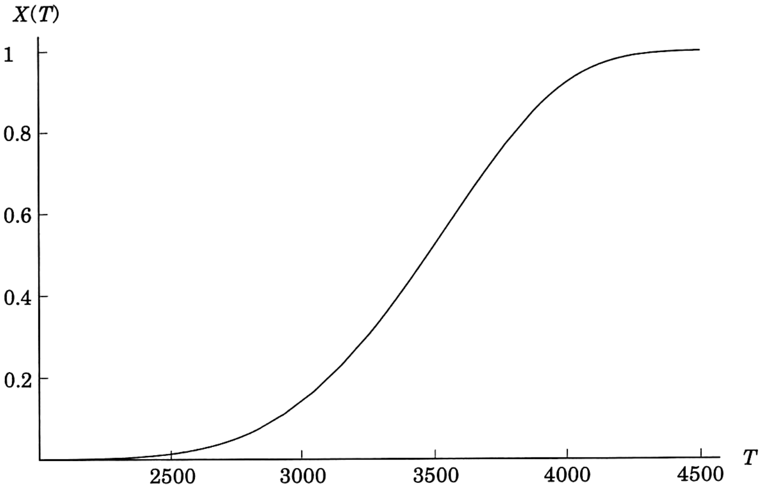


図 2.2　反応率の式（2.3.17）から得られる電離度を，ケルビンを単位とする温度の関数として示す．$\Omega_M h^2 = 0.132$, $\Omega_B h^2 = 0.0224$ を用いた．

再び式（2.3.26）を用い，時間積分を温度に渡る積分に変換するのが便利である．

$$\mathcal{O}(T) = 1 - \exp\left[-c\,\sigma_T \int_{2.725}^{T} n_e(T')\,dT'/H(T')T'\right]. \tag{2.3.34}$$

H には式（2.3.28）を用い，式（2.3.29）で与えられる n を用いて $n_e = Xn$ とすれば以下の式を得る．

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(T) &= 1 - \exp\left[-c\,\sigma_T \int_{2.725}^{T} n_e(T')\,dT'/H(T')T'\right] \\ &= 1 - \exp\left[-\int_{2.725}^{T} \frac{0.01168\,\Omega_B h^2\,T'^{1/2}\,X(T')\,dT'}{\sqrt{\Omega_M h^2 + 1.523\times10^{-5}\,T'}}\right].\end{aligned} \tag{2.3.35}$$

宇宙マイクロ波背景放射の異方性を研究する際に我々が特に興味があるのは，現在観測される光子が最後に散乱された時刻である．光子の最終散乱が温度が T より高い時期に起こった確率は $1-\mathcal{O}(T)$ であり，温度が $T-dT$ より低い時期に最終散乱が起こった確率は $\mathcal{O}(T-dT)$ であるから，光子の最終散乱が T と $T-dT$ の間の温度で起こった確率は以下で与えられる．

$$1 - (1 - \mathcal{O}(T)) - \mathcal{O}(T-dT) = \mathcal{O}'(T)\,dT. \tag{2.3.36}$$

不透明度の関数 $\mathcal{O}(T)$ は $\mathcal{O}=0$ となる $T=T_0$ から温度とともに増加し，$T\to\infty$ で $\mathcal{O}\to 1$ である．したがって $\mathcal{O}'(T)$ は規格化された正の確率分布を与え，T に渡る積分は 1 である．$\Omega_M h^2 = 0.15$ と，ある範囲の $\Omega_B h^2$ に対して計算した $\mathcal{O}'(T)$ の値 [*12] を表 2.3 に与える．$\mathcal{O}'(T)$ の分布は温度 T_L で最大となり，標準偏差 σ を持つ．それぞれの値を表 2.3 の最後の 2 行に与える．

* * *

ここで，表 2.2 や 2.3 の計算には使わなかったが，電離度に関するある近似[*13]について述べておこう．平衡状態では電離度は温度と $\Omega_B h^2$ のみに依存する．しかし，サハの式が電離度の良い近似値を与えない温度になると，電離度は $\Omega_B h^2$ だけでなく $\Omega_M h^2$ にも依存するようになる．これから導く近似を用いると，十分に低い温度における電離度は主に積 $(\Omega_M h^2)^{1/2}/\Omega_B h^2$ を通じて $\Omega_B h^2$ と $\Omega_M h^2$ に依存するが，不透明度 $\mathcal{O}'(T)$ はこれらのパラメータにほとんど依存しないことが示される．

この近似を導くためまず始めに，電離度が平衡時の値より十分大きくなると式（2.3.27）の角括弧（“[　]”）中の項 $(1-X)/S$（平衡時には X^2 に等しい）が X^2 の項よりもずっと小さくなることに着目しよう．表 2.1 と 2.2 を比較すれば，もっともらしい宇宙論パラメータの範囲において，$T < 3400$ K ではそれが成り立っているのがわかる．そのような温度では質量密度と比較して放射のエネルギー密度を無視できるから，式（2.3.28）で与えられる膨張率は単純に $7.2\times 10^{-19}\sqrt{\Omega_M h^2}\,\mathrm{s}^{-1}$ となる．また，3400 K から 2000 K の範囲の温度では実効的な $2p$ 状態の遷移率 $3P\Gamma_{2p}$ は $2s$ 状態の遷移率よりも小さくなり，$T < 2000$ K では再電離率 β が $3P\Gamma_{2p}$ や Γ_{2s} よりも小さくなる．したがって $T < 3400$ K 以下のすべての温度において，式（2.3.27）は以下の形をとる．

$$\frac{dX}{dT} = f(T)X^2, \tag{2.3.37}$$

ここで $f(T)$ は

$$f(T) = \frac{\alpha n}{HT}\left(1+\frac{\beta}{\Gamma_{2s}}\right)^{-1} = \frac{\Omega_B h^2}{(\Omega_M h^2)^{1/2}}\,g(T) \tag{2.3.38}$$

で与えられ，$g(T)$ は以下で与えられる温度のみの関数である．

[*13] B. J. T. Jones, R. F. Wyse, *Astron. Astrophys.*, **149**, 144 (1985).

表 2.3 式 (2.3.35) から計算した，最終散乱温度の規格化された確率分布 $\mathcal{O}'(T)$ を（ケルビンを単位とする）温度 T の関数として示す．2 列目から 4 列目では $\Omega_M h^2 = 0.15$ を固定し，$\Omega_B h^2$ を様々に変えて計算した $\mathcal{O}'(T)$ の結果を示す．最後の列では，7.2 節においてマイクロ波背景放射異方性の解析的計算を数値計算と比較する際に用いるパラメータ $\Omega_B h^2 = 0.02238$，$\Omega_M h^2 = 0.13229$ に対して得られた $\mathcal{O}'(T)$ の結果を示す．最後の 2 行では，$\mathcal{O}'(T)$ をガウス分布 $\exp[-(T-T_L)^2/2\sigma^2]/\sigma\sqrt{2\pi}$ に合わせて得られたパラメータを与える．T_L は $\mathcal{O}'$ が最大となる温度で，$1/\sigma\sqrt{2\pi}$ は $\mathcal{O}'$ の最大値，すなわち T_L における $\mathcal{O}'$ の値である．

T(K)	$\mathcal{O}'_{\Omega_B h^2 = 0.01}$	$\mathcal{O}'_{\Omega_B h^2 = 0.02}$	$\mathcal{O}'_{\Omega_B h^2 = 0.03}$	$\mathcal{O}'_{7.2\,節}$
4000	6.80×10^{-7}	5.39×10^{-10}	1.08×10^{-12}	5.75×10^{-11}
3500	2.26×10^{-4}	4.12×10^{-5}	1.15×10^{-5}	2.53×10^{-5}
3400	0.000451	0.000152	0.000069	0.000112
3300	0.000759	0.000412	0.000262	0.000345
3200	0.00109	0.000826	0.000664	0.000759
3100	0.00132	0.00127	0.00118	0.00124
3000	0.00139	0.00155	0.00157	0.00156
2900	0.00127	0.00154	0.00164	0.00158
2800	0.00102	0.00130	0.00142	0.00135
2700	0.000746	0.000965	0.00107	0.00101
2600	0.000502	0.000650	0.000721	0.000680
2500	0.000320	0.000411	0.000455	0.000429
2000	4.66×10^{-5}	5.16×10^{-5}	5.39×10^{-5}	5.25×10^{-5}
1000	9.50×10^{-6}	9.76×10^{-6}	9.87×10^{-6}	9.84×10^{-6}
T_L(K)	3017	2954	2930	2941
σ(K)	287	253	241	248

$$g(T) = \frac{84.2\,T^{-0.1166}}{1 + 5.085 \times 10^{-3} T^{0.53} + 4.22 \times 10^4\, T^{.8834} e^{-39474/T}}. \tag{2.3.39}$$

解は以下で与えられる．

$$X(T) \simeq \left[X(3400)^{-1} + \frac{\Omega_B h^2}{(\Omega_M h^2)^{1/2}} \int_T^{3400} g(T')\, dT' \right]^{-1}. \tag{2.3.40}$$

この式を表 2.2 に示す $\Omega_M = 0.15$ と $\Omega_B = 0.02$ の場合の結果と比べると，この

近似によって生じる誤差は温度が 3400 K から $\simeq 2500$ K に下がると 25%まで増加し，より低い温度 $T < 1400$ K では誤差は 10%以下である．温度が約 2600 K 以下では，電離度は 3400 K のときの値よりも非常に小さいので，大きな誤差を生むことなく式（2.3.40）の分母にある $X(3400)^{-1}$ の項を無視できる．これより，

$$X(T) \simeq \frac{(\Omega_M h^2)^{1/2}}{\Omega_B h^2} \left[\int_T^{3400} g(T')\, dT' \right]^{-1} \tag{2.3.41}$$

が得られ，十分低い温度では $X(T)$ が $(\Omega_M h^2)^{1/2}/\Omega_B h^2$ に比例することが示せた．（$\Omega_M h^2 = 0.15$ が固定されている．）表 2.2 を調べてみれば，$T < 1700$ K では確かにまあまあの精度で電離度が $\Omega_B h^2$ の逆数に比例しているのが確認できる．しかし，温度が 3000 K あたりではこれは良い近似ではない．

$T < 3200$ K において $\mathcal{O}'(T)$ の値が $\Omega_B h^2$ にほとんど依存しないのは注目に値する．ジョーンズとワイズ[13] によって述べられた理由は以下の通りである．放射エネルギー密度を無視できるくらい十分温度が低いと，式（2.3.35）より，$\ln[1 - \mathcal{O}(T)]$ は $\Omega_B h^2/\sqrt{\Omega_M h^2} \times T^{1/2} X(T)$ の積分に比例することがわかる．一方で近似式（2.3.41）より，低温では $X(T)$ が $\sqrt{\Omega_M h^2}/\Omega_B h^2$ に比例する．したがって低温では $\mathcal{O}(T)$ や $\mathcal{O}'(T)$ は $\Omega_B h^2$ や $\Omega_M h^2$ に依存しないことが示される．表 2.3 を見ると，もっともらしい宇宙論パラメータの値に対して最終散乱の温度 T_L は常に 3000 K に近く，その（標準偏差という意味での）広がりは 10%程度であることがわかる．

2.4　双極的異方性

この章では，前節まで宇宙マイクロ波背景放射が完全に等方かつ一様であるとして扱ってきた．これは確かに良い近似である．実際，1965 年の宇宙マイクロ波背景放射発見の際，ペンジアスとウィルソンが背景放射と地球大気の放射を区別できたのは，一つにはマイクロ波背景放射が空の方向によらなかったからである．

もちろん宇宙マイクロ波背景放射の強度は方向に応じて少しずつ変化するのだが，その変化量はペンジアスとウィルソンが測定するには小さすぎた．完全な等方性からのずれを測定することにより，宇宙の進化に関する重要な情報を引き出すことができる．本節では，もっとも単純でもっとも早期に発見された，宇宙マイクロ波背景放射が**見かけ上**等方的でないように見える現象を扱う．この現象は

地球の運動に起因するものである．そして 2.5 節と 2.6 節では，銀河団中の銀河間ガスにある電子が光子を散乱することで発生する異方性，および初期宇宙の名残りである第 1 の異方性を扱う．

宇宙マイクロ波背景放射が完全に一様等方であるならば，それは宇宙全体の基準座標系を決めるのに使える．すると，我々はその基準座標系において個々の銀河の特異速度を測定することができる．我々の銀河系の視点から測定する宇宙マイクロ波背景放射のデータを解析するには，位相空間における光子の数密度 $N_\gamma(\boldsymbol{p})$ を考えるのが有用である．この量は，**各々の**偏光状態（右回り，あるいは左回りの円偏光）を持つ光子の運動量が $\boldsymbol{p}$ を中心とする運動量空間の体積要素 d^3p 内にあるときの，光子の単位空間体積あたりの数密度が $N_\gamma(\boldsymbol{p})\,d^3p$ になるように定義される．$|\boldsymbol{p}| = h\nu/c$ であるから，周波数が ν から $\nu + d\nu$ の間にある運動量空間の体積は $4\pi\,h^3\nu^2 d\nu/c^3$ で与えられる．したがって式（2.1.1）より，

$$N_\gamma(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}\frac{n_T(c|\boldsymbol{p}|/h)}{4\pi h^3\nu^2/c^3} = \frac{1}{h^3}\frac{1}{\exp\left(|\boldsymbol{p}|c/kT\right) - 1} \tag{2.4.1}$$

を得る（因子 1/2 は，n_T が光子の取り得る**両方の**偏光状態を含むことに起因する）．これはもちろん背景放射に対して静止している観測者が測定するであろう光子の数密度である．位相空間の体積はローレンツ変換に対して不変であり，光子の数もまたローレンツ変換に対して不変であるから，N_γ は以下の意味でスカラー量である．つまり，$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}'$ へ移すローレンツ変換を施し，背景放射に対して動いている座標系へ移ったとする．このとき N_γ もまた N'_γ に移されるが，ローレンツ変換の前後で N_γ は不変である．

$$N'_\gamma(\boldsymbol{p}') = N_\gamma(\boldsymbol{p}). \tag{2.4.2}$$

地球が（c を単位とする）速度 β で 3 次元空間を運動しているとし，$\boldsymbol{p}$ が宇宙マイクロ波背景放射の静止系での光子の運動量，そして $\boldsymbol{p}'$ が地球上で観測される光子の運動量としよう．すると，以下の関係式を得る．

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ |\boldsymbol{p}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \beta\gamma \\ 0 & 0 & \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ |\boldsymbol{p}'| \end{pmatrix}, \tag{2.4.3}$$

ここで γ はローレンツ因子 $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ である．特に，

$$|\boldsymbol{p}| = \gamma \left(1 + \beta \cos\theta\right) |\boldsymbol{p}'| \tag{2.4.4}$$

であることに着目しよう．θ は $\boldsymbol{p}'$ と第 3 座標軸（地球の進行方向に取る）がなす角度である．したがって，

$$N'_\gamma(\boldsymbol{p}') = \frac{1}{h^3} \frac{1}{\exp\left(|\boldsymbol{p}'|c/kT'\right) - 1} \tag{2.4.5}$$

である．ここで温度 T' は以下のように光子の進行方向と地球の進行方向がなす角度の関数である．

$$T' = \frac{T}{\gamma\left(1 + \beta\,\cos\theta\right)}. \tag{2.4.6}$$

銀河系は，他の銀河で観測されている特異速度，つまり宇宙の平均膨張速度に対して数百キロメートル毎秒程度の速度で運動していると期待される．また，太陽系は銀河系内を同程度の速度で運動している．したがって β は大雑把にいって 10^{-3} 程度の大きさであり，その場合 γ は基本的に 1 である．見かけの温度は，$\cos\theta = -1$ の場合，つまり地球の進行方向からこちらに向かってやって来る光子を観測する場合に最大となり，そのときの温度は本来の温度よりも割合にして $\beta_{\text{地球}}$ だけ高い．同様に，$\cos\theta = +1$ の場合，つまり地球の進行方向と同方向に進む光子を観測する場合には見かけの温度は最小となり，そのときの温度は上記と同じ割合だけ低い．

この効果は 1969 年，放射計を用いた地上観測で初めて検出されたが，当時は地球の速度成分のうち，ある固定された赤緯（+32°）方向の成分しか測定できなかった．この測定より，赤緯 +32°，赤経 13h 方向の速度成分が 160 km/s と得られた[*1]．地球の速度ベクトルの全成分は 1977 年，バークレーのチームによる，地球大気の大部分よりもさらに上空を飛行できる高高度航空機 U2 からの観測で得られた[*2]．その後，この効果に関する理解は COBE 衛星の測定によって大きく進歩した．遠赤外絶対分光測光計（FIRAS; Far InfraRed Absolute Spectrophotometer）チーム[*3]は銀河座標[*4]$\ell = 264\overset{\circ}{.}14 \pm 0\overset{\circ}{.}30$, $b = 48\overset{\circ}{.}26 \pm 0\overset{\circ}{.}30$ の方向で極大となる

[*1] E. K. Conklin, *Nature*, **222**, 971 (1969).

[*2] G.F. Smoot, M.V. Gorenstein, R.A. Muller, *Phys. Rev. Lett.*, 39, 898 (1977).

[*3] D. J. Fixsen, *et al.*, *Astrophys. J.*, **473**, 576 (1996).

[*4] 銀緯 b は視線方向と銀河系円盤面がなす角度で，銀河の北極が $b = 90°$．銀経 ℓ は銀河系回転軸周りの方位角で，銀河系中心方向が $\ell = 0°$．

温度増加 $\varDelta T = 3.372 \pm 0.014$ mK（誤差は 95%の信頼領域）を得ることができ，差分マイクロ波放射計（DMR; Differential MicrowaveRadiometer）チーム[*5]は銀河座標 $\ell = 264^\circ\!.26 \pm 0^\circ\!.33$，$b = 48^\circ\!.22 \pm 0^\circ\!.13$，あるいは赤経 $11^{\rm h}12^{\rm m}\!.2 \pm 0^{\rm m}\!.8$，赤緯 $-7^\circ\!.06 \pm 0^\circ\!.16$ の方向で極大となる温度増加 $\varDelta T = 3.353 \pm 0.024$ mK（誤差は 95%の信頼領域）を得た．

より最近では，WMAP 衛星[*6]（7 章で詳しく述べる）から $\ell = 263^\circ\!.85 \pm 0^\circ\!.1$，$b = 48^\circ\!.25 \pm 0^\circ\!.04$ の方向で極大となる温度増加 3.346 ± 0.017 mK が得られている．これらの結果は太陽系が速度 $(0.00335)c/(2.725) = 370$ km/s で運動していることを示している．この運動方向はおとめ座銀河団の方向 $\ell \approx 284^\circ$，$b \approx 74^\circ$ に大体近い．これを他の速度と比較してみると，銀河系の回転による銀河系中心周りの地球の運動速度は 215 km/s で，その方向は上記の方向とほぼ逆である．これを考慮すると，宇宙マイクロ波背景放射の静止系に対する局所銀河群の正味の速度として[*7] 627 ± 22 km/s が得られ，その運動方向（$\ell = 276^\circ \pm 3^\circ$，$b = 30^\circ \pm 3^\circ$）はうみへび座銀河団の方向とケンタウルス銀河団の方向の間に位置する．

式（2.4.6）を β の冪乗で展開すると，温度ゆらぎは以下のようにルジャンドル多項式の和で書ける．

$$\varDelta T \equiv T' - T = T\left[-\frac{\beta^2}{6} - \beta P_1(\cos\theta) + \frac{2\beta^2}{3}P_2(\cos\theta) + \cdots\right]. \qquad (2.4.7)$$

$\beta = 370\ \text{km/s}/c = 0.0013$ が小さいのでこの温度ゆらぎは主に双極的であるが，式（2.4.7）はまた「運動学的四重極」項の存在も表している．この項は 2.6 節で議論する宇宙論的な四重極温度ゆらぎよりも小さいが，ものすごく小さいわけではない．

2.5 スニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果

宇宙マイクロ波背景放射の異方性に寄与するもう一つの効果として，視線方向の銀河団内に存在する銀河間ガス中の電子による背景放射の散乱がある．これは**スニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果**[*1]として知られている．付録 C の式（C.26）（カ

[*5] C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J.*, **464**, L1 (1996).

[*6] C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.*, **148**, 1 (2003).

[*7] G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Kogut, J. Aymon, C. Backus *et al.*, *Astrophys. J.*, **371**, L1 (1991); A. Kogut, C. Lineweaver, G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Banday *et al.*, *Astrophys. J.*, **419**, 1 (1993).

[*1] Ya. B. Zel'dovich, R. A. Sunyaev, *Astrophys. Space Sci.*, **4**, 301 (1969); R. A. Sunyaev, Ya. B. Zel'dovich, *Comments Astrophys. and Space Physics*, **2**, 66 (1970); **4**, 173 (1972).

ンパニーツ方程式）によれば，非相対論的[*2]電子ガスは，エネルギー $\hbar\omega \ll m_e c^2$ を持つ光子の占有数 $N(\omega)$（エネルギーが $\hbar\omega$ から $\hbar(\omega + d\omega)$ の間にあるとき，各々の偏光状態にある光子の数が $4\pi\omega^2 N(\omega)\,d\omega$ となるように定義される量）を以下の率で変化させる（ここでは CGS 単位系を用いる）．

$$\dot{N}(\omega) = \frac{n_e \sigma_\mathcal{T}}{m_e\, c\,\omega^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[k_\mathcal{B} T_e \omega^4 \frac{\partial N(\omega)}{\partial\omega} + \hbar\omega^4 N(\omega)\Big(1 + N(\omega)\Big)\right],$$

ここで $\sigma_\mathcal{T}$ はトムソン散乱断面積，n_e は電子数密度，T_e は電子温度である．この公式を用いて，光子と温度 T_e のマクスウェル–ボルツマン分布にある電子が相互作用することで生じる，一様等方な光子の占有数 $N(\omega)$ の時間変化率を計算できる．応用例として，視線方向のガス雲中の電子散乱により，宇宙マイクロ波背景放射の観測量がどのように変化するかに着目しよう．この目的のため，カンパニーツ方程式を以下のように書き換える．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\ell}N(\omega,\ell) &= \frac{n_e(\ell)\sigma_\mathcal{T}}{m_e\, c^2\,\omega^2}\frac{\partial}{\partial\omega} \\ &\times \left[k_\mathcal{B} T_e(\ell)\omega^4 \frac{\partial N(\omega,\ell)}{\partial\omega} + \hbar\omega^4 N(\omega,\ell)\Big(1 + N(\omega,\ell)\Big)\right], \qquad (2.5.1)\end{aligned}$$

ここで ℓ は，ガス雲を貫く視線方向に沿って測る固有距離である．

銀河団中の典型的な電離プラズマ温度は 10^6 度以上であるから，$k_\mathcal{B} T_e$ の値は宇宙マイクロ波背景放射の典型的な光子のエネルギー $\hbar\omega$ である 10^{-4}eV から 10^{-3}eV に比べて圧倒的に大きい．この場合，式（2.5.1）は以下のように簡単化できる．

$$\frac{\partial}{\partial\ell}N(\omega,\ell) = \frac{n_e(\ell)\sigma_\mathcal{T} k_\mathcal{B} T_e(\ell)}{m_e\, c^2\,\omega^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^4 \frac{\partial N(\omega,\ell)}{\partial\omega}\right]. \qquad (2.5.2)$$

これは線形微分方程式なので厳密に解くことができるが[*3]，たいていの場合厳密解は必要ではない．なぜなら銀河団中の電子ガスは光学的に薄いため，放射がガス雲を通り抜ける際に生じる光子占有数の変化は式（2.5.2）から単純に以下のように与えられるからである．

$$\Delta N(\omega) = \frac{y}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^4 \frac{\partial N(\omega)}{\partial\omega}\right], \qquad (2.5.3)$$

[*2] 相対論的補正は小さいが，銀河団中の電離ガスは温度が高いため補正が完全に無視できるわけではない．Y. Rephaeli, *Astrophys. J.*, **445**, 33 (1995); A. Challinor, A. Lasenby, *Astrophys. J.*, **499**, 1 (1998); N. Itoh, U. Kohyama, S. Nozawa, *Astrophys. J.*, **502**, 7 (1998) を見よ．

[*3] Ya. B. Zel'dovich, I. D. Novikov, *Relativistic Astrophysics, Volume 2: The Structure and Evolution of the Universe*, L. Fishbone 訳, University of Chicago Press (1983)：式（8.7.3）．

ここで y は無次元パラメータで

$$y \equiv \frac{\sigma_{\mathcal{T}}}{m_e c^2} \int d\ell \, n_e(\ell) k_{\mathcal{B}} T_e(\ell), \tag{2.5.4}$$

で定義され，積分はガス雲を貫く視線方向に沿って行う．温度 T_γ の黒体放射に対しては $N(\omega)$ は，

$$N(\omega) = \frac{1}{\exp\left(\hbar\omega / k_{\mathcal{B}} T_\gamma\right) - 1} \tag{2.5.5}$$

で与えられるから，これを式（2.5.3）に代入すれば，

$$\varDelta N = y \left(\frac{-x + (x^2/4)\coth(x/2)}{\sinh^2(x/2)} \right) \tag{2.5.6}$$

を得る．ここで $x \equiv \hbar\omega / k_{\mathcal{B}} T_\gamma$ である．したがって一般的に，散乱は実効温度を変えるだけでなく光子のエネルギー分布の形も変えることがわかる．式（2.5.6）の特徴的な ω 依存性を用いれば，電波観測によってスニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果から生じる異方性と 2.6 節および 7 章で議論する第 1 の温度異方性を区別することが可能である．

ただし，$x \ll 1$ に対応するレイリー–ジーンズ領域のスペクトルに対して式（2.5.6）は $\varDelta N \to -2y/x$ を与えるが，式（2.5.5）より $N \to 1/x$ であるから，この領域のスペクトルの形は散乱によって影響されない．この場合の光子温度の変化の割合は以下に等しい．

$$\frac{\varDelta T_\gamma}{T_\gamma} = \frac{\varDelta N}{N} = -2y. \tag{2.5.7}$$

光子よりも圧倒的に高い温度を持つ電子ガス雲との散乱により，光子の温度が**下がる**のには驚いたかもしれないが，これはレイリー–ジーンズ領域のスペクトルにのみあてはまる現象である．$x \gg 1$ に対応する黒体放射のピークを超えると，式（2.5.5）と式（2.5.6）は $\varDelta N/N$ に**正の**値 yx^2 を与える．レイリー–ジーンズ領域に見られる温度下降は，低エネルギーから高エネルギーへの光子の輸送によるものなのだ．現に式（2.5.3）から積分 $\int \varDelta N(\omega)\omega^2 d\omega$ はゼロとなることが示せる．よって，我々の受け取る全光子数は電子ガス雲の散乱前後で保存される．

式（2.5.7）は，低周波領域で観測される光子の温度が電子ガス雲の散乱によって変化する割合を与える．そのような電子ガスは通常銀河団に付随している．も

し銀河団が赤方偏移 z にあったならば，T_γ と ΔT_γ の両方ともが因子 $(1+z)^{-1}$ によって減少するが，それらの比は z によらず，またハッブル定数や他の宇宙論パラメータにもよらない．ただし，これらの量が銀河団の n_e と固有長さを推定するのに用いられる場合には話が異なる．電子温度 T_e は銀河団の光度を光子の波長の関数として観測することで測定でき，(光子エネルギーの宇宙論的赤方偏移を補正すれば) その結果は銀河団の赤方偏移や H_0 によらない．しかし，視線方向の固有長さは銀河団の見かけの大きさと角径距離 d_A から推定されねばならない．d_A は H_0 の逆数に比例するから，スニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果のパラメータ y の観測から計算された電子密度は，d_A を計算する際に仮定した H_0 の値に比例する．

スニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果の測定は，銀河団の X 線光度の測定と組み合わせることで有益な情報をもたらす[*4]．速度 v（ただし $1/137 \ll v \ll 1$）の非相対論的電子と，速度の小さい原子核との衝突の際生じる制動放射を考えよう．この過程で放出される光子のエネルギーが $\hbar\omega$ から $\hbar(\omega+d\omega)$ の間（ここで $\hbar\omega$ は $m_e v^2/2$ 程度の大きさではあるが，$m_e v^2/2$ の値そのものに非常に近いわけではない）にあるとき，その微分断面積 $d\sigma$[*5]は $v^{-2}d\omega/\omega$ に比例する．また，陽子の数密度は電子の数密度と等しく，典型的な v の値は $(k_{\mathcal{B}}T/m_e)^{1/2}$ 程度の大きさである．したがって，電子温度 T_e と電子数密度 n_e を持つ光学的に薄いプラズマガス雲から制動放射によって光子が放出され，それらの光子を我々が波長 λ において半径 R のアンテナで受け取る場合，このアンテナで分解可能な立体角面積要素 $(\lambda/R)^2$ から単位時間あたりに受け取る光子の数は以下で与えられる．

$$[R^2/d_A^2][d_A^2\,(\lambda/R)^2]\int d\ell\,\langle v\,d\sigma\rangle\,n_e^2 \;\propto\; \lambda^2\left(\frac{d\omega}{\omega}\right)\int d\ell\,T_e^{-1/2}n_e^2. \tag{2.5.8}$$

これより，銀河団の X 線光度と見かけの大きさの測定から推定される n_e の値は，仮定した $H_0^{1/2}$ の値に比例することがわかる．X 線光度から推定された n_e の値がスニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果から得られた値と一致するように要請すれば，H_0 を求めることができる．たとえば，$z \simeq 0.55$ にある 2 つの銀河団の研究より，（d_A を計算する際に $\Omega_M = 0.3$ と $\Omega_\Lambda = 0.7$ を仮定することで）ハッブル定数の

[*4] J. Silk, S. D. M. White, *Astrophys. J.*, **226**, L103 (1978); A. Cavaliere, L. Danese, G. De Zotti, *Astron. Astrophys.*, **75**, 322 (1979). このトピックに関するレビューは，M. Birkinshaw, *Phys. Rep.*, **310**, 97 (1999) を見よ．

[*5] たとえば V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*, 2nd edition, J. B. Sykes 訳, J. S. Bell, Pergamon (1982) を見よ．

値として $63^{+12}_{-9} \pm 21$ km/s/Mpc が得られている．最初の不定性は統計誤差，次の不定性は系統誤差で，両者とも 68%の信頼領域を示す*6．ただし，このような測定は銀河団の形や電子分布の非一様性に関する仮定に非常に強く依存するため，スニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果と X 線光度の測定はハッブル定数を決めるというよりも銀河団に関する情報を得るのにより有用であるように思われる．ある側面だけを見ればスニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果は迷惑な存在である．というのは，それは将来的な，非常に小さい見込み角における第 1 温度ゆらぎの相関の測定の邪魔になるからだ*7．しかし，8 章で議論するような構造形成のモデルと組み合わせれば，小角度における宇宙マイクロ波背景放射中のスニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果の観測から有益な宇宙論的情報を引き出すことができる*8．既に，そのような小角度における相関の観測結果*9がスニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果によるものであると解釈されている*10．

2.6　宇宙マイクロ波背景放射の第 1 のゆらぎ：概観

2.4 節と 2.5 節では，現在に近い時刻の宇宙における効果――すなわち，宇宙マイクロ波背景放射の静止系に対する地球の運動，および視線方向の銀河団内にある銀河間電子ガスによる散乱から生じる宇宙マイクロ波背景放射の異方性を考えた．ここからはより一般の異方性，とりわけ初期宇宙に起源を持つ**第 1 の異方性**を考えよう*1．

単位ベクトル $\hat{n}$ で与えられる方向に観測されるマイクロ波放射の温度と現在の平均温度 T_0 との差を $\Delta T(\hat{n})$ と書こう．これを球面調和関数 $Y_\ell^m(\hat{n})$ で展開するのが便利だ．

$$\Delta T(\hat{n}) \equiv T(\hat{n}) - T_0 = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_\ell^m(\hat{n}), \qquad T_0 \equiv \frac{1}{4\pi}\int d^2\hat{n}\, T(\hat{n}), \tag{2.6.1}$$

*6 E. D. Reese *et al.*, *Astrophys. J.*, **533**, 38 (2000).

*7 Y. Rephaeli, *Astrophys. J.*, **245**, 351 (1981); S. Cole, N. Kaiser, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **233**, 637 (1988).

*8 E. Komatsu, T. Kitayama, *Astrophys. J.*, **526**, L1 (1999).

*9 B. S. Mason *et al.*, *Astrophys. J.*, **591**, 540 (2003).

*10 E. Komatsu, U. Seljak, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **336**, 1256 (2002); J. R. Bond *et al.*, *Astrophys. J.*, **626**, 12 (2005).

*1 P. J. E. Peebles, J. T. Yu, *Astrophys. J.*, **162**, 815 (1970); R. A. Sunyaev, Ya. B. Zel'dovich, *Astrophys. Space Sci.*, **7**, 20 (1970); Ya. B. Zel'dovich, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **160**, 1 (1972).

ここで ℓ に関する和はすべての正の整数について取り，m に関する和は $-\ell$ から ℓ までのすべての整数について取る．$\Delta T(\hat{n})$ は実数であるから，展開係数 $a_{\ell m}$ は以下の条件を満たさねばならない．

$$a_{\ell m}^* = a_{\ell\ -m}. \tag{2.6.2}$$

（本書で用いる球面調和関数は $Y_\ell^m(\hat{n})^* = Y_\ell^{-m}(\hat{n})$ となるように定義する．）2.4 節で見たように，地球の運動に起因する異方性 $\Delta T(\hat{n})$ は良い近似で $P_1(\cos\theta) \propto Y_1^0(\theta,\phi)$ に比例する（z 軸は地球の運動方向に取る）から，この効果によって生成される主な $a_{\ell m}$ は $\ell = 1$ と $m = 0$ を持つ．

展開係数 $a_{\ell m}$ は最終散乱面の物理現象を反映するだけでなく，宇宙において地球が占める特定の位置の情報も反映している．しかし，宇宙論の理論で後者を予言するのは不可能であるから，宇宙論的に最も興味がある量は**平均値**である．ここでいう平均の持つ意味は，宇宙のあらゆる場所から見た放射分布の平均とみなしても良いし，我々が地球から観測するような特定のゆらぎのパターンを再現できる，過去のイベントの可能なすべての組み合わせに渡る平均とみなしても良い．付録 D で述べるエルゴード定理によれば，ある妥当な仮定のもとでこれら二つの平均は一致する．これらの平均を取る作業を角括弧 $\langle\cdots\rangle$ で書くことにする．10 章で見るように，インフレーション中に量子ゆらぎから生成された異方性の量子力学的期待値は，この過去のイベントの組み合わせに渡る平均作業に関係している．さて，今からある **1 つの**特定のイベントの組み合わせで生成された宇宙の中の，ある **1 つの**特定の場所から得られた観測を用いてこれらの平均値を求める手法を学ぶが，まずはじめに記号をいくつか導入しておこう．

平均化された宇宙は，回転変換に対して不変であるとしよう．したがって，$\langle \Delta T(\hat{n}_1)\Delta T(\hat{n}_2)\Delta T(\hat{n}_3)\cdots\rangle$ は $\hat{n}_1$，$\hat{n}_2$ 等の方向に関して回転不変な関数となる．特に，$\langle \Delta T(\hat{n})\rangle$ は $\hat{n}$ に依存しないことに留意しよう．温度ゆらぎ $\Delta T(\hat{n})$ は角度平均された温度からのずれとして定義されるから，それ自身の角度平均 $\int \Delta T(\hat{n}) d^2\hat{n}/4\pi$ はゼロである．観測者の位置に関する平均を取れば $\int \langle \Delta T(\hat{n})\rangle d^2\hat{n} = 0$ を得るが，$\langle \Delta T(\hat{n})\rangle$ は $\hat{n}$ に依存しない量であるから，$\langle \Delta T(\hat{n})\rangle$ もまたゼロである．

宇宙マイクロ波背景放射の異方性を特徴づける量のうち，最も単純かつ自明でないものは **2 点における** ΔT の積の平均だ．回転変換に対する不変性より，二つ

の a_{lm} の積の平均は以下の形を取ることが要請される．

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{m,-m'} C_\ell. \tag{2.6.3}$$

というのは，この要請を置くことによって二つの ΔT の積の平均が回転不変となり，以下のように書けるからだ．

$$\langle \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}') \rangle = \sum_{\ell m} C_\ell Y_\ell^m(\hat{n}) Y_\ell^{-m}(\hat{n}') = \sum_\ell C_\ell \left(\frac{2\ell+1}{4\pi} \right) P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}'), \tag{2.6.4}$$

ここで P_ℓ は通常のルジャンドル多項式である．この式の左辺が与えられれば，ルジャンドル逆変換によって C_ℓ を求められる．

$$C_\ell = \frac{1}{4\pi} \int d^2\hat{n}\, d^2\hat{n}'\, P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}') \langle \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}') \rangle. \tag{2.6.5}$$

式（2.6.3）と等価であるが，C_ℓ を，

$$\langle a_{\ell m} a^*_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{m\,m'} C_\ell$$

のように定義することもでき，これより C_ℓ が正の実数であることがわかる．付録 E で述べるような意味でガウス分布に従うゆらぎ ΔT に対しては，C_ℓ さえ与えられれば，ΔT のすべての積の平均値を求められる．

もちろん，実際には我々がマイクロ波背景放射を観測できる空は一つであって，宇宙を移動して観測場所を変えつつ測定を繰り返し，その平均を取ることはできない．実際に測定できるのは場所に渡る平均ではなく，m に渡る平均である．

$$C_\ell^{\text{観測}} \equiv \frac{1}{2\ell+1} \sum_m a_{\ell\, m}\, a_{\ell\, -m} = \frac{1}{4\pi} \int d^2\hat{n}\, d^2\hat{n}'\, P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}') \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}'). \tag{2.6.6}$$

宇宙論的に興味のある C_ℓ と実際に観測される $C_\ell^{\text{観測}}$ との差は**コスミック・バリアンス**（宇宙論的分散）として知られている．うまいことに，ガウス分布に従うゆらぎに対しては，コスミック・バリアンスは ℓ が増えるとともに減少する．差の 2 乗平均を C_ℓ の 2 乗で割ったものは以下で与えられる．

$$\left\langle \left(\frac{C_\ell - C_\ell^{\text{観測}}}{C_\ell} \right)^2 \right\rangle = 1 - 2 + \frac{1}{(2\ell+1)^2 C_\ell^2} \sum_{m\, m'} \langle a_{\ell\, m}\, a_{\ell\, -m}\, a_{\ell\, m'}\, a_{\ell\, -m'} \rangle. \tag{2.6.7}$$

もし ΔT がガウス統計に従うなら，多重極展開の係数 $a_{\ell\, m}$ もガウス統計に従う（ただし，$a_{\ell\, m}$ の 2 乗で与えられる，C_ℓ のような量はガウス統計に従わ**ない**）．

すると，以下が成り立つ[*2]．

$$\begin{aligned}\langle a_{\ell\,m}\,a_{\ell\,-m}\,a_{\ell\,m'}\,a_{\ell\,-m'}\rangle &= \langle a_{\ell\,m}\,a_{\ell\,-m}\rangle\,\langle a_{\ell\,m'}\,a_{\ell\,-m'}\rangle \\ &+ \langle a_{\ell\,m}\,a_{\ell\,m'}\rangle\,\langle a_{\ell\,-m}\,a_{\ell\,-m'}\rangle \\ &+ \langle a_{\ell\,m}\,a_{\ell\,-m'}\rangle\,\langle a_{\ell\,-m}\,a_{\ell\,m'}\rangle\,. \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

式 (2.6.3) を代入すれば，式 (2.6.8) の右辺の第 1 項は式 (2.6.7) の和において $(2\ell+1)^2C_\ell^2$ を与える．また，第 2 項と第 3 項はそれぞれ $(2\ell+1)C_\ell^2$ を与えるから，式 (2.6.7) は以下のように書ける．

$$\left\langle\left(\frac{C_\ell - C_\ell^{\text{観測}}}{C_\ell}\right)^2\right\rangle = \frac{2}{2\ell+1}. \tag{2.6.9}$$

したがって，小さな ℓ では C_ℓ の測定精度があまり良くない．一方，同様の計算から $\ell \neq \ell'$ の場合には，

$$\left\langle\left(\frac{C_\ell - C_\ell^{\text{観測}}}{C_\ell}\right)\left(\frac{C_{\ell'} - C_{\ell'}^{\text{観測}}}{C_{\ell'}}\right)\right\rangle = 0 \tag{2.6.10}$$

となることが導けるから，C_ℓ と $C_\ell^{\text{観測}}$ の差は，ℓ が違うと相関がない．C_ℓ はなめらかに変化する量であるから，C_ℓ がほとんど変化しないある範囲の $\Delta\ell$ におけるすべての ℓ で $C_\ell^{\text{観測}}$ が測定されれば，この ℓ の範囲で平均された C_ℓ のコスミック・バリアンスは因子 $1/\sqrt{\Delta\ell}$ だけ減らせる．たとえそうであっても，おそらく $\ell < 5$ における C_ℓ の測定からは宇宙論に関して得るものがほとんどないだろう．また，$\ell > 2000$ における測定は，前節で議論したスニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果のような前景放射の効果で汚染されるだろう．それでも，うまいことに ℓ が 5 から 2000 の間の C_ℓ には多くの特徴的な構造があり，それらの構造から非常に貴重

---

*2 異方性の確率分布における非ガウス的な成分は，奇数個の $a_{\ell\,m}$ の積の平均値がゼロでない値を持つ，あるいは偶数個の $a_{\ell\,m}$ の積の平均値に関するガウス分布の公式 (2.6.8) に対する補正として現れる．そのような非ガウス的成分は初期宇宙や比較的後期の宇宙の両方で生成される．このトピックに関するレビューは，N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese, A. Riotto, *Phys. Rep.*, **402**, 103 (2004) を見よ．インフレーション中の量子ゆらぎによって生成される非ガウス成分は，ツリー近似を用いて J. Maldacena, *J. High Energy Phys.*, 05 (2003) 013 によって計算された．この結果に対するループ補正は以下の仕事によって考慮されている：S. Weinberg, *Phys. Rev. D*, **72**, 043514 (2005) [hep-ph/0506236]; *Phys. Rev. D.*, **74**, 023508 (2006) [hep-ph/0605244]; K. Chaicherdsakul, *Phys. Rev. D*, **75**, 063522 (2007) [hep-th/0611352]. 宇宙後期の寄与に関しては M. Liguori, F. K. Hansen, E. Komatsu, S. Matarrese, A. Riotto, *Phys. Rev. D*, **73**, 043505 (2006) [astro-ph/0509098] を見よ．マイクロ波背景放射の異方性が小さいことから，非ガウス成分はおそらく非常に小さいであろうと思われる．これまでのところ，非ガウス成分の存在を示す観測的証拠はない．

な宇宙論的情報を得られるのだ.

宇宙マイクロ波背景放射の第1の異方性は，以下に述べるいくつかの効果から生じている.

(1) 最終散乱時（赤方偏移にして約 1090）の電子–核子–光子プラズマからなる内的温度ゆらぎ[*3].

(2) 最終散乱時のプラズマが持つ速度ゆらぎによるドップラー効果.

(3) 最終散乱時の重力ポテンシャルのゆらぎによる重力赤方偏移や青方偏移. これは**ザクス–ヴォルフェ効果**として知られている[*4].

(4) 最終散乱時と現在時刻の間で生じた重力ポテンシャルのゆらぎの時間変動による重力赤方偏移や青方偏移（この効果においてはゆらぎが時間変動することが本質的である．なぜなら，時間変動しないポテンシャルの井戸に落ち込んだ光子は，落ち込む際に得たエネルギーと正確に同じ量をポテンシャルを登るときに失うからである）．これは，やや紛らわしい名前ではあるが，**積分ザクス–ヴォルフェ効果**として知られている.

これらの効果をきちんと取り扱うには一般相対論が必要となり，これは 5 章から 7 章のテーマである．一方で，温度が 10^4 K 以下に下がった時刻から真空のエネルギーが重要となる赤方偏移 1 程度の時刻までは，そこそこ良い近似で宇宙の重力場は冷たい暗黒物質に支配されているとしてよく，その時期の現象はニュートン物理学の手法を用いて扱うことが可能である．したがって，手始めに本節ではザクス–ヴォルフェ効果と積分ザクス–ヴォルフェ効果に集中しよう．これらは ℓ が 40 程度よりも小さい範囲の多重極展開係数 C_ℓ を決める上で最も重要な効果である．内的温度ゆらぎとドップラー効果の寄与については，この節では 2, 3 の事項を簡単におさえておくだけにしておく.

ザクス–ヴォルフェ効果と積分ザクス–ヴォルフェ効果を考えるため，式（1.5.21）

[*3] 厳密にいえば，ある固定された温度 $T_L \simeq 3000$ K で宇宙が突然晴れ上がる（非透明度が急激に減少する）という近似のもとでは，我々が観測するのは内的温度ゆらぎではなく，この近似の結果として最終散乱赤方偏移 z_L に生じるゆらぎである．平均温度 $\bar{T}(t)$ は $1/a(t)$ に比例するから，全温度 $\bar{T}(t) + \delta T(t)$ がある固定された値 T_L に到達する時刻における $a(t)$ の値 a_L は，平均の a_L から $-(T_L/a_L)\delta a_L + \delta T(t_L) = 0$ で与えられる量 δa_L だけずれる（他の効果を無視すると）観測される温度は $T_L a(t_L)/a_0$ であるから，ゆらぎの 1 次まで取ればこれは $T_L \delta a_L / a_0 T_0 = \delta T(t_L) a_L / a_0 T_0 = \delta T(t_L)/T_L$ で与えられる割合だけずれる．つまり，あたかも我々が内的温度ゆらぎ $\delta T(t_L)/T_L$ を直接観測しているような結果となる.

[*4] R. K. Sachs, A. M. Wolfe, *Astrophys. J.*, **147**, 73 (1967).

から式（1.5.27）で大枠を述べたニュートン的宇宙論に立ち戻ろう．一様等方宇宙への摂動のニュートン的扱いは付録 F で述べるが，ここでは付録 F で導く結果のうち 1 つだけが必要となる．すなわち，共動座標系 $\boldsymbol{x}$ で表したとき，重力ポテンシャルの摂動は**時間に依存しない**関数 $\delta\phi(\boldsymbol{x})$ で書ける，という結果である．この摂動は光子に 2 つの効果を及ぼす．1 つ目は，通常の重力赤方偏移効果による．最終散乱時に重力ポテンシャルの摂動 $\delta\phi(\boldsymbol{x})$ を持つ点 $\boldsymbol{x}$ から放出された光子は，その周波数（すなわちエネルギー）が $\delta\phi(\boldsymbol{x})$ の割合だけ変化する．したがって，我々がある方向 $\hat{n}$ を見た際に観測する温度は，全天に渡る平均値から以下で与えられる量だけずれる．

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)_1 = \delta\phi(\hat{n}r_L). \tag{2.6.11}$$

ここで r_L は最終散乱面の動径座標で，式（1.5.44）を用いて，

$$r_L = \frac{1}{\Omega_K^{1/2} H_0 a(t_0)} \sinh\left[\Omega_K^{1/2} \int_{1/(1+z_L)}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\Lambda x^4 + \Omega_K x^2 + \Omega_M x + \Omega_R}}\right] \tag{2.6.12}$$

と与えられ，$\Omega_K = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_M - \Omega_R$ である．また，$z_L \simeq 1090$ は最終散乱時の赤方偏移，t_0 は現在の時刻である．2 つ目は，重力ポテンシャルの摂動により，宇宙の膨張率が $\delta\phi(\boldsymbol{x})$ の割合だけ変化する効果である．物質優勢宇宙の温度は $a^{-1} \propto t^{-2/3}$ に比例して減少するから，我々から見て $\hat{n}$ の方向の宇宙が最終散乱の温度 $\simeq 3000$ K に達した時刻の赤方偏移の値は，重力ポテンシャルの摂動の存在によって以下の割合だけずれる．

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta z}{1+z}\right)_{T=3000\,\mathrm{K}} &= -\left(\frac{\delta a(t)}{a(t)}\right)_{T=3000\,\mathrm{K}} \\ &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{T=3000\,\mathrm{K}} \times \delta\phi(r_L\hat{n})t_L = \frac{2}{3}\delta\phi(r_L\hat{n}).\end{aligned}$$

その他すべての効果を無視すれば $\hat{n}$ の方向に観測される温度は 3000 K を $1+z$ で割ったものであるから，上記の $1+z$ のずれは観測される温度を以下の割合だけ変化させる．

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)_2 = -\frac{2}{3}\delta\phi(\hat{n}r_L). \tag{2.6.13}$$

式（2.6.11）と式（2.6.13）で与えられる温度変化を足し合わせれば，ザクス–ヴォ

ルフェ（SW）効果の表式,

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)_{\rm SW} = \frac{1}{3}\delta\phi(\hat{n}r_L) \tag{2.6.14}$$

を得る．7 章では，より根拠のしっかりとした相対論的扱いによって因子 1/3 を導く．

$\delta\phi(\boldsymbol{x})$ を以下のようにフーリエ変換して書くのが有用である．

$$\delta\phi(\boldsymbol{x}) = \int d^3q\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\delta\phi_{\boldsymbol{q}}. \tag{2.6.15}$$

これに，よく知られた指数関数のルジャンドル展開の公式,

$$e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} = \sum_\ell (2\ell+1)i^\ell P_\ell(\hat{q}\cdot\hat{n})\, j_\ell(qr) \tag{2.6.16}$$

を代入する．j_ℓ は球ベッセル関数で，通常のベッセル関数 $J_\nu(z)$ とは $j_\ell(z) \equiv (\pi/2z)^{1/2}J_{\ell+1/2}(z)$ で関係づけられる．すると，式（2.6.14）は,

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)_{\rm SW} = \frac{1}{3}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\, i^\ell \int d^3q\, \delta\phi_{\boldsymbol{q}}\, j_\ell\,(q\, r_L)\; P_\ell(\hat{q}\cdot\hat{n}) \tag{2.6.17}$$

と書き換えられる．

これより，異なる 2 方向で測定する温度ゆらぎの積の平均を計算する作業に入る．$\delta\phi(\boldsymbol{x})$ は位置に依存するが，宇宙の異なる場所にいる観測者から見た $\delta\phi(\boldsymbol{x})$ の確率分布は空間の回転変換と並進変換に対して不変である．これから導かれる数ある事項の中に，以下の関係式がある．

$$\langle\delta\phi_{\boldsymbol{q}}\,\delta\phi_{\boldsymbol{q}'}\rangle = \mathcal{P}_\phi(q)\,\delta^3(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}'). \tag{2.6.18}$$

ここで $\mathcal{P}_\phi(q)$ は $\boldsymbol{q}$ の大きさのみに依存する関数である（デルタ関数は，$\langle\delta\phi(\boldsymbol{x})\delta\phi(\boldsymbol{y})\rangle$ が $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ のみの関数となるために必要）．$\delta\phi(\boldsymbol{x})$ は実数だから，そのフーリエ変換は条件 $\delta\phi^*_{\boldsymbol{q}} = \delta\phi_{-\boldsymbol{q}}$ を満たし，式（2.6.18）と合わせれば $\mathcal{P}_\phi(q)$ が正の実数であることが示せる．

式（2.6.17）と式（2.6.18），およびルジャンドル多項式の反転性 $P_\ell(-z) = (-1)^\ell P_\ell(z)$ と直交性,

$$\int d\Omega_{\hat{q}}\, P_\ell\,(\hat{n}\cdot\hat{q})\; P_{\ell'}\,(\hat{n}'\cdot\hat{q}) = \left(\frac{4\pi}{2\ell+1}\right)\delta_{\ell\,\ell'}P_\ell\,(\hat{n}\cdot\hat{n}') \tag{2.6.19}$$

を用いれば,

$$\langle \Delta T(\hat{n})\, \Delta T(\hat{n}')\rangle_{\rm SW} = \frac{4\pi T_0^2}{9}\sum_{\ell}(2\ell+1)\, P_\ell(\hat{n}\cdot\hat{n}')\int_0^\infty q^2\, dq\, \mathcal{P}_\phi(q) j_\ell^2(qr_L) \tag{2.6.20}$$

を得る．また，式（2.6.4）と比べれば，

$$C_{\ell,\,\rm SW} = \frac{16\pi^2 T_0^2}{9}\int_0^\infty q^2\, dq\, \mathcal{P}_\phi(q) j_\ell^2(qr_L) \tag{2.6.21}$$

が導かれる．

重力ポテンシャルの生成が，圧力の無視できる冷たい暗黒物質に支配されている限り，$\delta\phi$ の進化を記述する微分方程式は空間微分を含まず，したがってそのフーリエ変換の進化を記述する微分方程式は $\boldsymbol{q}$ を含まない（式（F.12）と式（F.18）を見よ）．だから，$\delta\phi_{\boldsymbol{q}}$ の $\boldsymbol{q}$ 依存性は，これらの微分方程式の初期条件のみから生じるはずである*5．試しに関数 $\mathcal{P}_\phi(q)$ の形が q の冪乗のような単純な形を取ると仮定してみよう．この冪指数は慣例的に $n-4$ と書かれる．

$$\mathcal{P}_\phi(q) = N_\phi^2 q^{n-4}. \tag{2.6.22}$$

N_ϕ^2 は正の定数である．すると，標準的な公式，

$$\int_0^\infty j_\ell^2(s)\, s^{n-2} ds = \frac{2^{n-4}\pi\Gamma(3-n)\,\Gamma\left(\ell+\dfrac{n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{4-n}{2}\right)\,\Gamma\left(\ell+2-\dfrac{n-1}{2}\right)} \tag{2.6.23}$$

を用いれば，式（2.6.21）から以下の結果が導ける．

$$C_{\ell,\,\rm SW} \to \frac{16\pi^3 2^{n-4}\Gamma(3-n) r_L^{1-n} N_\phi^2 T_0^2}{9\,\Gamma^2\left(\dfrac{4-n}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\ell+\dfrac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\ell+2-\dfrac{n-1}{2}\right)}. \tag{2.6.24}$$

ただし，脚注 5 に述べた理由からこの結果は $\ell < 100$ でのみ正しいことに注意しよう．

宇宙マイクロ波背景放射第 1 ゆらぎの発見以前に，n と N_ϕ の値が予見されていたことは特筆に値する．これはマイクロ波背景放射の観測に基づいたものではなく，現在の時刻に比較的近いところで観測された物質の大規模構造の観測に基づく．全物質密度に対する摂動 $\delta\rho$ は，ポアソン方程式，

---

*5 ただし，もし q の値が非常に大きく，宇宙の密度が冷たい物質に支配される時期以前に q/a が H より大きくなるような場合には，この記述は（たとえザクス–ヴォルフェ効果であっても）正しくなくなる．7 章で見るように，この効果は $\ell > 100$ における $C_{\ell,\rm SW}$ に影響を及ぼす．

$$a^{-2}\nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \qquad (2.6.25)$$

を通してザクス–ヴォルフェ効果と関係づけられる．左辺に $a^{-2}(t)$ があるのは，固有距離が $\boldsymbol{X} = a(t)\boldsymbol{x}$ で与えられるからである（式（F.12）を見よ）．$\delta\rho$ のフーリエ変換を $\delta\phi$ のフーリエ変換で書けば，密度ゆらぎの相関関数が以下のように書き表せられる．

$$\langle\delta\rho(\boldsymbol{x},t)\delta\rho(\boldsymbol{x}',t')\rangle = (4\pi Ga(t)a(t'))^{-2}\int d^3q\, q^4\, \mathcal{P}_\phi(q)\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}. \qquad (2.6.26)$$

この式を用いた $\mathcal{P}_\phi$ の測定は 8 章で議論する．今のところはとりあえず，大昔に行われた密度相関関数の観測結果の考察が，$\mathcal{P}_\phi$ が $n=1$ を持ついわゆるハリソン–ゼルドヴィッチ形式[*6]を取り，ゆらぎの大きさが $N_\phi \approx 10^{-5}$ 程度であるだろうという予見につながった，と述べておくだけにしよう．10 章で見るように，インフレーション理論は一般に n の値は 1 に近いが厳密に 1 ではないと予言する．$n=1$ の場合には，相関関数が r_L に依存しないという意味でスケール不変な結果を得る．

$$C_{\ell,\mathrm{SW}} \to \frac{8\pi^2 N_\phi^2 T_0^2}{9\ell(\ell+1)}. \qquad (2.6.27)$$

宇宙マイクロ波背景放射の実験データがたいてい $\ell(\ell+1)C_\ell$ を縦軸，ℓ を横軸とした図で表されているのは，この結果（$n=1$ の場合には $\ell(\ell+1)C_{\ell,\mathrm{SW}}$ が ℓ によらない）が動機となっている．

次に，C_ℓ に寄与する他の効果を考えよう．光子–核子–電子プラズマの動力学では圧力勾配による力が重要な役割を果たすため，ドップラー効果や内的温度ゆらぎの寄与を求める際には波数 q を含む微分方程式を解かねばならない．どのような摂動を扱う際にも，摂動を式（2.6.15）のようなフーリエ積分で書き，積分中の $e^{i\boldsymbol{q}\cdot\hat{n}r_L}$ を式（2.6.16）を用いてルジャンドル多項式 $P_\ell(\hat{q}\cdot\hat{n})$ の級数展開で書くことができる．その際の展開係数は $j_\ell(qr_L)$ に比例する．$\ell \gg 1$ の場合，q に渡る積分は q が ℓ/r_L 程度のとき大きな寄与を持つ（$\ell \gg 1$ は最も興味ある領域である．というのは，式（2.6.9）より，C_ℓ の測定でコスミック・バリアンスが無視できるようになるのは $\ell \gg 1$ の場合だけである）．これは，$\ell \gg 1$ の球ベッセル関数 $j_\ell(z)$ が $z \simeq \ell$ にピークを持つためである．より詳しくいえば，ν/z を 1 以外の

*6 E. R. Harrison, *Phys. Rev.*, **D1**, 2726 (1970); Ya. B. Zel'dovich, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **160**, 1P (1972).

適当な値に固定し，$\nu \equiv \ell + 1/2 \to \infty$ および $z \to \infty$ という極限を取った場合，球ベッセル関数は以下の極限を取る．

$$j_\ell(z) \to \begin{cases} 0 & z < \nu \\ z^{-1/2}(z^2 - \nu^2)^{-1/4} \cos\left(\sqrt{z^2 - \nu^2} - \nu \arccos(\nu/z) - \dfrac{\pi}{4}\right) & z > \nu. \end{cases} \tag{2.6.28}$$

ゆえに，大きな ℓ における C_ℓ は主に $q \approx \ell/r_L$ を持つフーリエ成分の振る舞いを反映している．別の言い方をすれば，時刻 t_L における物理的波数は（この時刻での固有距離が $a(t_L)\boldsymbol{x}$ で与えられるので）$\boldsymbol{k}_L \equiv \boldsymbol{q}/a(t_L)$ で与えられることにより，大きな ℓ における C_ℓ は $k_L \approx \ell/d_A$ を持つ摂動の振る舞いを反映している．ここで d_A は最終散乱面までの**角径距離**で，

$$d_A \equiv r_L a(t_L) = \frac{1}{\Omega_K^{1/2} H_0 (1 + z_L)} \times \sinh\left[\Omega_K^{1/2} \int_{\frac{1}{1+z_L}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\Lambda x^4 + \Omega_K x^2 + \Omega_M x + \Omega_R}}\right] \tag{2.6.29}$$

で与えられ，$1 + z_L \equiv a(t_0)/a(t_L)$ である．

物理的波数 q/a が宇宙の膨張率 H よりもずっと小さい頃には，ある 1 つの摂動の進化を記述する微分方程式は基本的に波数 q を含まないので，摂動の q 依存性はすべて初期条件によって与えられる（もちろん，$\delta\phi_q$ と $\delta\rho_q$ のような異なる種類の摂動の比は q に依存して良い）．そのような波数を持つ摂動は「地平線の外側にある」といわれる．なぜなら，その波長 $2\pi a/q$ が地平線の距離（厳密にいえば,「粒子の地平線」の距離）よりもずっと大きいからだ．1.13 節で見たように，地平線の距離は $1/H$ 程度の大きさである．放射優勢や物質優勢時の宇宙では q/a はそれぞれ $t^{-1/2}$，$t^{-2/3}$ に比例して減少するが，H はそれよりも速く，$1/t$ に比例して減少する．したがって，早期に地平線の外側にあった摂動は後に地平線の内側に入って来ることになる．大きな波数を持つ摂動ほど，小さな波数を持つものよりも早期に地平線の内側に入る．

ここで，地平線距離に関してもう少し正確に述べておこう．最終散乱の時刻では宇宙はほぼ物質優勢であるから，1.13 節で示したようにその時刻での地平線距離は $2/H(t_L)$ で近似できる．これは，宇宙の減速膨張が始まった時刻から最終散乱の時刻までに**光**が届くことのできた最大の距離だ．一方，5 章と 6 章で見るよ

うに，宇宙マイクロ波背景放射の異方性に重要となる核子，電子，光子のプラズマで支配的な摂動は**音波**であるから，音速が光速より小さいことを考慮せねばならない．再結合以前の時期では放射と物質が熱平衡にあり，そこでは音速は $v_s = (\delta p/\delta\rho)^{1/2}$ で与えられる．ここで δp と $\delta\rho$ はそれぞれ**断熱的**なゆらぎによる圧力と密度の微小な変化を表す．断熱的ゆらぎとはバリオン 1 個あたりのエントロピーが摂動を受けずに一様に保たれるようなゆらぎのことで，以下の条件を満たす．

$$0 = \delta\sigma \propto \delta\left(\frac{\varepsilon}{n_B}\right) + p\,\delta\left(\frac{1}{n_B}\right),$$

ここで ε は熱エネルギー密度，n_B はバリオンの数密度，p は圧力である．2.2 節で見たように光子の数はバリオンの数に比べて圧倒的に多いため，ε と p は放射の寄与によって決められている．

$$\varepsilon = a_{\mathcal{B}}T^4, \qquad p = \frac{1}{3}a_{\mathcal{B}}T^4,$$

したがって，断熱的ゆらぎに対しては，

$$3\,\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta n_B}{n_B} = \frac{\delta\rho_B}{\rho_B}, \tag{2.6.30}$$

が成り立つ（ρ_B はバリオンの質量密度）．これより音速は，

$$v_s = \left(\frac{4a_{\mathcal{B}}T^3\delta T/3}{\delta\rho_B + 4a_{\mathcal{B}}T^3\delta T}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3(1+R)}}, \tag{2.6.31}$$

で与えられ，新しい量 R は $R \equiv 3\rho_B/4a_{\mathcal{B}}T^4$ で定義する．$\rho_B \propto a^{-3}$ かつ $T \propto a^{-1}$ であるから，$R \propto a$ を得る．ゆえに $dt = dR/HR$ であり，きちんと書き下せば，

$$dt = \frac{dR}{RH_0\sqrt{\Omega_M(R_0/R)^3 + \Omega_R(R_0/R)^4}} = \frac{R\,dR}{H_0\sqrt{\Omega_M}R_0^{3/2}\sqrt{R_{\rm EQ}+R}}$$

である．ここで，$R_{\rm EQ} \equiv \Omega_R R_0/\Omega_M = 3\Omega_R\Omega_B/4\Omega_M\Omega_\gamma$ は物質と放射のエネルギー密度が等しくなる時刻での R の値である．したがって，音波の地平線距離は以下の式で与えられる．

$$d_H \equiv a_L\int_0^{t_L}\frac{dt}{a\sqrt{3(1+R)}} = R_L\int_0^{t_L}\frac{dt}{R\sqrt{3(1+R)}}$$

$$= \frac{2}{H_0\sqrt{3R_L\Omega_M}(1+z_L)^{3/2}}\ln\left(\frac{\sqrt{1+R_L}+\sqrt{R_{\rm EQ}+R_L}}{1+\sqrt{R_{\rm EQ}}}\right), \tag{2.6.32}$$

$R_L = 3\Omega_B/4\Omega_\gamma(1+z_L)$ は最終散乱時刻での R の値である．空間微分は $k_L \approx 1/d_H$ のとき重要となり，また C_ℓ を計算する際行う波数積分は $k_L \approx \ell/d_A$ で大きな寄与を持つから，空間微分は ℓ の値が $\ell_H \equiv d_A/d_H$ で定義する ℓ_H に達したときに重要となる．d_A と d_H は両方とも $1/H_0$ に比例しているから，その比は H_0 によらない．

ℓ_H の値を大雑把に評価してみよう．d_A は $(1+z_L)^{-1}$ に比例する一方，d_H は $(1+z_L)^{-3/2}$ に比例するから，ℓ_H は $(1+z_L)^{1/2} = 33$ 程度の大きさだと見積もることができる．次に，超新星の観測と（3.2 節で議論する）宇宙の元素合成から示唆される宇宙論パラメータの値，$\Omega_M = 0.26$，$\Omega_\Lambda = 0.74$，$\Omega_B = 0.043$，を用いてより正確な値を算出してみよう．これらの宇宙論パラメータに対しては $R_L = 0.62$，$R_{\mathrm{EQ}} = 0.21$，$d_A = 3.38\,H_0^{-1}(1+z_L)^{-1}$，$d_H = 1.16\,H_0^{-1}(1+z_L)^{-3/2}$ が得られるから，最終的に $\ell_H = 2.9\sqrt{1+z_L} = 96$ を得る．

これより，ザクス–ヴォルフェ効果以外に C_ℓ に寄与する効果の相対的な大きさを求めてみよう．

- **ドップラー効果**：あらゆるベクトル場がそうであるように，プラズマの速度場もスカラー量の勾配で書ける項と，発散がゼロとなる「ベクトル」量の項の和に分解できる．付録 F で示すようにベクトル項は $1/a$ に比例して減衰するから，支配的となる摂動は圧縮性の摂動モードであり，その速度はスカラー量の勾配で書ける．したがって，$\Delta T/T_0$ を計算する際に行う波数 q 積分中では，小さな波数のドップラー効果の寄与は $\boldsymbol{k}_L d_H$ 程度の大きさを持つ因子によって抑えられる．7 章でより詳しく見るように，ドップラー効果は波数ベクトル $\boldsymbol{k}_L$ に比例するため，その温度ゆらぎへの寄与はザクス–ヴォルフェ効果の寄与と干渉しない．したがって，ℓ が $\ell \ll \ell_H$ の領域にあればドップラー効果の寄与はザクス–ヴォルフェ効果の寄与よりも $[(\ell/d_A)d_H]^2 = \ell^2/\ell_H^2$ 程度の大きさだけ小さい．
- **内的温度ゆらぎ**：式（2.6.30）で見たように，最終散乱時刻での内的温度ゆらぎの割合は，プラズマ密度ゆらぎの割合のちょうど 3 分の 1 である．5 章と 6 章で後ほど学ぶ，地平線の外側で支配的となると考えられている摂動の性質によれば，地平線の外側ではプラズマ密度の摂動の割合は全物質密度の摂動の割合 $\delta\rho/\bar{\rho}$ と等しくなる．このような性質を持つ摂動も，広い意味で断熱的ゆらぎと呼ばれている．一方，全物質密度の摂動はポアソン方程式（2.6.25）によって重力ポテンシャルの摂動と結びついている．最終散乱時刻でのポアソン方程式のフーリエ変換は，

$$\delta\rho_{\boldsymbol{q}}(t_L) = -\frac{q^2}{4\pi G a^2(t_L)}\delta\phi_{\boldsymbol{q}} = -\frac{k_L^2}{4\pi G}\delta\phi_{\boldsymbol{q}}$$

で与えられ，以前のように $k_L = q/a(t_L)$ は最終散乱時刻での物理的波数を表す．また，最終散乱時刻での全質量密度の平均値 $\bar{\rho}(t_L)$ は地平線のサイズ d_H と，

$$\bar{\rho}(t_L) \simeq \frac{3H^2(t_L)}{8\pi G} \approx \frac{1}{2\pi G d_H^2}$$

を通して結びついている．以上より，内的温度ゆらぎの割合と重力ポテンシャルの摂動との関係式が導ける．

$$\frac{\delta T(t_L)}{\bar{T}(t_L)} = \frac{\delta\rho(t_L)}{3\bar{\rho}(t_L)} \approx k_L^2 d_H^2 \delta\phi_q. \tag{2.6.33}$$

したがって，$\Delta T/T_0$ を計算する際に行う波数 q 積分中では，小さな波数の内的温度ゆらぎの寄与は因子 $\boldsymbol{k}_L^2 d_H^2$ によって抑えられると期待できる．内的温度ゆらぎとザクス–ヴォルフェ項との**干渉**によって生じる $\ell \ll \ell_H$ の C_ℓ に対する寄与は，ドップラー効果のときのように，ザクス–ヴォルフェ効果の寄与と比べて $[(\ell/d_A)d_H]^2 \equiv \ell^2/\ell_H^2$ 程度の大きさだけ小さい（ただし，ザクス–ヴォルフェ効果と内的温度ゆらぎの効果の区別は時間座標の取り方に依存することを述べておかねばならない．ここで与えた非相対論的な結果は，5 章から 7 章で与える相対論的扱いにおいてニュートンゲージと呼ばれる座標系を選んだ際に得られる結果に対応する）．

- **積分ザクス–ヴォルフェ効果**：すでに述べたように，$\delta\phi$ がまったく時間変動しなければ積分ザクス–ヴォルフェ効果は存在しない．時間変動しない重力ポテンシャルの井戸に落ち込む光子が得る青方偏移は，光子が井戸を登って抜け出る際の赤方偏移で打ち消されてしまうからだ[*7]．実際には，重力ポテンシャルの摂動は厳密に一定ではない．まず，最終散乱後しばらくは放射の重力場への寄与が無視できないため時間変動が生ずる．次に，真空のエネルギーが重要となるような後期の宇宙では，付録 F で述べるニュートン的な扱いは修正されねばならない．

[*7] 重力ポテンシャルのゆらぎが，(冷たい暗黒物質が集中してできる）宇宙の非線形構造によって時間変動するために生じる異方性もあり，これは**リース–シアマ効果**として知られている．文献は，M. J. Rees, D. W. Sciama, *Nature*, **217**, 511 (1968)．この効果は非常に小さいと考えられている．U. Seljak, *Astrophys. J.*, **460**, 549 (1996) を見よ．我々のごく近傍の非線形構造によって大きな効果が得られる可能性に関しては，A. Rakić, S. Räsänen, D. J. Schwarz, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **363**, L27 (2006) [astro-ph/0601445] を見よ．

真空のエネルギーによる後期の積分ザクス–ヴォルフェ効果は，主に ℓ が 10 程度より小さい領域の C_ℓ に影響する．

以上の考察より，$10 < \ell < 50$ の領域における C_ℓ は主にザクス–ヴォルフェ効果の寄与からなっていると考えて良い．

マイクロ波背景放射の静止系に対する地球の運動から生じる $\ell = 1$ の異方性の観測を除けば，宇宙マイクロ波背景放射の異方性の最初の検出は 1992 年，COBE 衛星によって成し遂げられた*8．COBE 衛星は，互いに 60° 離れた 2 つのアンテナで全天を掃天観測した．実験に用いられた周波数は 31.5，53，90 GHz の 3 つで，後者 2 つの周波数領域では銀河系からの放射の寄与がほぼ最小となる一方，2.7 K を持つプランク分布が最大値を持つ周波数にも近い．1992 年のデータからは，温度ゆらぎの 2 乗平均平方根 30 ± 5 μK が得られた．また，ゆらぎの相関関数の角度依存性より，データは $n = 1$ と無矛盾であることが示された．同じ装置による 4 年間の観測を経て，C_ℓ の値が $\ell = 2$ から $\ell = 40$ の範囲の ℓ において測定された*9．$\ell \geqq 3$ のデータを式（2.6.24）と比べて得られた値は $n = 1.13^{+0.3}_{-0.4}$ で，ハリソン–ゼルドヴィッチスペクトルと呼ばれる値 $n = 1$ と無矛盾であった．$n = 1$ を仮定した場合のゆらぎの大きさは，しばしば以下のように表される．

$$C_\ell = \frac{24\pi Q^2}{5\ell(\ell+1)}, \tag{2.6.34}$$

ここで Q は**4 重極モーメント**として知られる量だ．この式を，$3 \leqq \ell \leqq 40$ における C_ℓ と比べることで，1996 年の COBE の解析は $Q = 18 \pm 1.4$ μK を与えた．式（2.6.34）と式（2.6.27）を比べれば，COBE の結果から以下の値が導かれる．

$$N_\phi = \sqrt{\frac{27}{5\pi}}\frac{Q}{T_0} = (8.7 \pm 0.7) \times 10^{-6}. \tag{2.6.35}$$

驚きであったのは，COBE によって測定された $\ell = 2$ のゆらぎの振幅の値が，式（2.6.34）に $\ell \geqq 3$ の観測データから得られた Q を代入して算出した $\ell = 2$ の値よりもずっと小さかったことだ．これは，角度にして約 60° 以上離れた 2 点の相関関数がほぼゼロであること*10とも関係しているかもしれない．この結果はそ

---

*8 G. F. Smoot *et al.*, *Astrophys. J.*, **396**, L1 (1992).

*9 C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J.*, **464**, L1 (1996) [astro-ph/9601067]; A. Kogut *et al.*, *ibid*, L5 (1996) [astro-ph/9601066]; K. M. Górski *et al.*, *ibid*, L11 (1996) [astro-ph/9601063]; G. Hinshaw *et al.*, *ibid*, L17 (1996) [astro-ph/9601058]: E. L. Wright *et al.*, *ibid*, L21 (1996) [astro-ph/9601059].

*10 G. Hinshaw *et al.*, *Astrophys. J.*, **464**, L25 (1996) [astro-ph/9601061].

の後，7 章で説明する WMAP 衛星の観測によって確認されている[*11]．この食い違いの説明として大いにあり得るのは，前景放射による影響とコスミック・バリアンスの影響だ[*12]．式 (2.6.9) によれば，$\ell=2$ におけるコスミック・バリアンスは 63%である．

式 (2.6.34) が有効な ℓ の範囲を超える，大きな ℓ における C_ℓ の計算は 7 章まで待たねばならない．その前に，5 章と 6 章で一般相対論を用いた宇宙論的ゆらぎの理論を学ぶ. 7 章ではまた，過去 10 年に渡って COBE の測定をより詳細にし，さらに大きな ℓ まで発展させてきた他の観測にも触れる．

[*11] D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.*, **148**, 175 (2003).

[*12] G. Efstathiou, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **346**, L26 (2003) [astro-ph/0306431]; A. Slosar, U. Seljak, A. Makarov, *Phys. Rev. D*, **69**, 123003 (2004) [astro-ph/0403073]; A. Slosar, U. Seljak, *Phys. Rev. D*, **70**, 083002 (2004); G. Hinshaw *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **170**, 288 (2007).

第3章
初期宇宙

ここまで，放射の温度が 10^4 K を少し超えるあたりから出発し，現在の温度 2.725 K に至るまでの宇宙の歴史を学んできた．本章では，10^4 K よりもずっと高温の時期すなわち放射のエネルギー密度がバリオンや冷たい暗黒物質のエネルギー密度よりもずっと大きい時期まで遡る．温度が 10^{10} K よりも高く，電子–陽電子対が豊富に存在し，それらがニュートリノと熱平衡にあったような時期も超え，物理法則に関する我々の現在の理解が許す限りの高温にまで遡ってみたい．

3.1 熱史

まず始めに，初期宇宙では温度がどのように下がるのかを見てみよう．本節で扱う温度は 10^4 K から 10^{11} K までである．この温度はミュー粒子–反ミュー粒子対やハドロン–反ハドロン対を対生成するには低すぎるので，これらの粒子は考えなくても良い．

この時期に成立している 2 つの条件より，本節の議論を大幅に簡素化できる．まず 1 つ目に，この時期の光子と電子，および光子と他の粒子の衝突率が宇宙の膨張率に比べてずっと大きいため，光子と荷電粒子は熱平衡状態にあったと仮定できる．したがってこれらの粒子は同じ温度を共有し，温度の下がり方も同じである．十分早期にはニュートリノ，さらにはおそらく冷たい暗黒物質粒子でさえも光子および荷電粒子と熱平衡であっただろう．その後温度が下がり，もはや他の粒子との衝突が十分速く行われなくなったとき，これらの粒子は自由粒子とみなし，他の粒子と分離して扱えるようになる．次に，バリオン粒子の数密度（より厳密には，バリオン粒子の数密度から反バリオン粒子の数密度を差し引いたもの）が光子の数密度よりも圧倒的に小さいため，バリオン数に付随する化学ポテ

ンシャルは無視できる（バリオンは 3.2 節で詳しく議論する）．また，現在の電子と光子の数密度比が非常に小さいため，光子 1 個あたりの**正味の**レプトン数密度（全種類のレプトンの数密度から反レプトンの数密度を差し引いたもの）は，宇宙の進化の中で常に小さかった，と仮定するのは妥当である．これは，宇宙が 10^{10} K という高温状態にあり，電子–陽電子対が豊富で宇宙のエネルギー密度と圧力が単純に T^4 に比例せず，またエントロピー密度も単純に T^3 に比例しないような状況下にあったとしても，エントロピー密度 $s(T)$，エネルギー密度 $\rho(T)$，圧力 $p(T)$ は温度のみの関数であることを意味する（正味のレプトン数が無視できない可能性については本節の最後で議論する）．

この時期における宇宙の歴史を学ぶ前に，熱平衡状態にあり，かつ化学ポテンシャルが無視できるような物質の熱力学と統計力学を手短かに見ておこう．熱平衡の条件より，共動体積中のエントロピーは保存される．

$$s(T)a^3 = \text{一定}. \tag{3.1.1}$$

熱力学第 2 法則によれば，温度 T と体積 V を持つ熱平衡状態を温度 $T + dT$ と体積 $V + dV$ を持つ新しい熱平衡状態にゆっくり変化させたとき，エントロピーは以下のように変化する．

$$d(s(T)V) = \frac{d(\rho(T)\,V) + p(T)\,dV}{T}. \tag{3.1.2}$$

両辺の dV の係数を等号で結べば，エントロピー密度に関する以下の公式を得る．

$$s(T) = \frac{\rho(T) + p(T)}{T}. \tag{3.1.3}$$

また，$V\,dT$ の係数を等号で結び，かつ式（3.1.3）を用いればエネルギー保存則を得る．

$$T\frac{dp(T)}{dT} = \rho(T) + p(T). \tag{3.1.4}$$

（たとえば，放射圧力が $p(T) = \rho(T)/3$ で与えられることより，式（3.1.4）からシュテファン–ボルツマン則 $\rho = a_{\mathcal{B}}T^4$ を導ける．ただし定数 $a_{\mathcal{B}}$ は熱力学のみからは決められない．次に，式（3.1.3）から放射エントロピー密度の表式 $s(T) = 4\,a_{\mathcal{B}}T^3/3$ を導ける．2.2 節で定数 $\sigma k_{\mathcal{B}} \equiv 4a_{\mathcal{B}}T^3/3n_B$ がバリオン 1 個あたりの放射エントロピーを表すといったのは，このためである．）

粒子と反粒子が同数ある場合には，質量 m を持ち，運動量が p から $p + dp$ の

間にあるフェルミ粒子（たとえば電子）とボーズ粒子（たとえば光子）の数密度分布 $n(p)dp$ は，それぞれ（化学ポテンシャルがゼロの）フェルミ–ディラック分布とボーズ–アインシュタイン分布で与えられる．

$$n(p,T) = \frac{4\pi g p^2}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{1}{\exp(\sqrt{p^2+m^2}/k_{\mathcal{B}}T)\pm 1}\right), \tag{3.1.5}$$

ここで g は粒子と反粒子が取り得るスピン状態の数，そして分母の $\pm$ はフェルミ粒子の場合は $+$，ボーズ粒子の場合は $-$ を取る．たとえば光子は 2 つの偏光状態を持ち，その反粒子は光子自身と同一であるから $g=2$（そしてもちろん $m=0$）だが，電子と陽電子はそれぞれ 2 つのスピン状態を持ち，それぞれはっきり区別できる別の粒子であるから $g=4$ である．質量 m を持つ粒子のエネルギー密度と圧力は以下の積分で与えられる[*1]．

$$\rho(T) = \int_0^\infty n(p,T)\,dp\,\sqrt{p^2+m^2}, \tag{3.1.6}$$

$$p(T) = \int_0^\infty n(p,T)\,dp\,\frac{p^2}{3\sqrt{p^2+m^2}}. \tag{3.1.7}$$

この粒子のエントロピー密度は式（3.1.3）から以下のように与えられる．

$$s(T) = \frac{1}{T}\int_0^\infty n(p,T)\,dp\left[\sqrt{p^2+m^2}+\frac{p^2}{3\sqrt{p^2+m^2}}\right]. \tag{3.1.8}$$

特に，質量がゼロの粒子に対しては式（3.1.6）から，

$$\begin{aligned}\rho(T) &= g\int_0^\infty \frac{4\pi p^3 dp}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{1}{\exp(p/k_{\mathcal{B}}T)\pm 1}\right)\\ &= \begin{cases} g a_{\mathcal{B}} T^4/2 & \text{ボーズ粒子}\\ 7 g a_{\mathcal{B}} T^4/16 & \text{フェルミ粒子}\end{cases}\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

が得られる．もちろんこの場合，$p(T)=\rho(T)/3$ かつ $s(T)=4\rho(T)/3T$ になる．言い換えれば，質量ゼロのフェルミ粒子の各スピン状態が持つエネルギー密度，圧力，エントロピー密度は，因子 7/8 がかかることを除けば光子の各偏光状態が持つエネルギー密度，圧力，エントロピー密度と同じである．

熱平衡の期間中，温度の時間変化はエントロピー保存の式（3.1.1）とアインシュ

[*1] 式（3.1.6）は $n(p,T)$ の定義からそのまま導けるし，式（3.1.7）は式（3.1.4）から導ける．式（B.41）と式（B.43）から式（3.1.6）と式（3.1.7）を導くこともできる．

タインの場の方程式によって決められる．空間曲率を無視すれば，場の方程式は，

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho(T)}{3} \tag{3.1.10}$$

で与えられ，これをエントロピー保存の式と合わせれば以下の式を得る．

$$t = -\int \frac{s'(T)\,dT}{s(T)\sqrt{24\pi G\rho(T)}} + \text{積分定数}. \tag{3.1.11}$$

（ここで $\dot{T}^2$ の平方根を取る際にマイナス符号を選んだのは，時間の経過とともに温度が下がる解を選ぶためである．）特に，宇宙の支配的成分が相対論的理想気体のときは，エントロピー密度とエネルギー密度はつねに，

$$s(T) = \frac{2\mathcal{N}a_{\mathcal{B}}T^3}{3}, \tag{3.1.12}$$

$$\rho(T) = \frac{\mathcal{N}a_{\mathcal{B}}T^4}{2} \tag{3.1.13}$$

で与えられる．$\mathcal{N}$ は粒子の実効的な種類数で，粒子，反粒子，各スピン状態を別々に数え上げ，フェルミ粒子には因子 7/8 をかけてから足し上げたものだ．これらの結果を用いれば式（3.1.11）は以下の形に書き換わる．

$$t = \sqrt{\frac{3}{16\pi G\mathcal{N}a_{\mathcal{B}}}}\,\frac{1}{T^2} + \text{積分定数}. \tag{3.1.14}$$

これらの結果をふまえ，温度が 10^{11} K 程度の時刻から宇宙の歴史を見てみよう．この温度は $m_\mu \gg k_{\mathcal{B}}T \gg m_e$ の範囲にあるから，$\nu_\mu + e \to \mu + \nu_e$ や $\nu_\tau + e \to \tau + \nu_e$ といった反応が起こるには低すぎるが，μ ニュートリノ，τ ニュートリノ，およびそれぞれの反ニュートリノは，ニュートリノ–電子散乱や $e^+ + e^- \rightleftharpoons \nu + \bar{\nu}$ のような中性カレント反応[訳注 1]によって熱平衡状態に保たれている．ゆえに，この時期の宇宙の主成分は 2 つのスピン状態を持つ光子，それぞれに 1 つのスピン状態を持つ 3 種類のニュートリノと 3 種類の反ニュートリノ，それぞれに 2 つのスピン状態を持つ電子と陽電子である．これらすべての粒子は平衡状態にあり，かつ相対論的だから，

$$\mathcal{N} = 2 + \frac{7}{8}(6+4) = \frac{43}{4} \tag{3.1.15}$$

が得られ，これを式（3.1.14）に代入することで，

訳注 1　弱い相互作用のうち，電荷を持たない中性の Z^0 ボソンを媒介して起こる反応．

$$t=\sqrt{\frac{3c^2}{172\pi G a_{\mathcal{B}}}}\frac{1}{T^2}+\text{積分定数}=0.994\ \mathrm{s}\ \left[\frac{T}{10^{10}\ \mathrm{K}}\right]^{-2}+\text{積分定数} \qquad (3.1.16)$$

が得られる．単位は CGS 単位系を用いた．たとえば，ミュー粒子の寄与を無視し，電子の質量も無視すると，温度が 10^{12} K から 10^{11} K まで下がるのに 0.0098 秒かかり，さらに 10^{10} K まで下がるのに 0.98 秒かかる計算となる．

温度が約 10^{10} K の頃，ニュートリノが熱平衡状態から離れ，自由膨張を始めた．弱い相互作用に属するニュートリノ–電子散乱の散乱断面積は大雑把に見積もって $\sigma_{\mathrm{wk}} \approx (\hbar G_{\mathrm{wk}}\, k_{\mathcal{B}} T)^2$ である．ここで $G_{\mathrm{wk}} \simeq 1.16\times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$ は弱い相互作用の結合定数，そして因子 $\hbar^2$ は単位を (エネルギー)$^{-2}$ から断面積の単位である (長さ)^2 に変換するために含めた（$c=1$ の単位系を用いていることを思い出そう）．温度が 10^{10} K 以上のときの電子の数密度は大雑把に見積もって $n_e \approx (k_{\mathcal{B}}T/\hbar)^3$ だから，そのような高温状態下のニュートリノと電子，あるいはニュートリノと陽電子との衝突率は以下で与えられる．

$$\Gamma_\nu = n_e \sigma_{\mathrm{wk}} \approx G_{\mathrm{wk}}^2 (k_{\mathcal{B}}T)^5/\hbar.$$

この衝突率を宇宙の膨張率と比べてみよう．放射優勢時の膨張率は，

$$H \approx \sqrt{G(k_{\mathcal{B}}T)^4/\hbar^3}$$

程度の大きさである．因子 $\hbar^{-3}$ は，単位を (エネルギー)^4 から質量密度の単位である (質量)/(長さ)^3 に変換するために含めた．これより，衝突率と宇宙膨張率との比は，

$$\frac{\Gamma_\nu}{H} \approx G_{\mathrm{wk}}^2 (\hbar/G)^{1/2} (k_{\mathcal{B}}T)^3 \simeq \left(\frac{T}{10^{10}\ \mathrm{K}}\right)^3$$

で与えられることがわかる．すなわち温度が 10^{10} K 以上のときにはニュートリノは十分な頻度で散乱され，熱平衡状態にある．この温度は $m_e/k_{\mathcal{B}}$ と比べて少し高いくらいなので，温度がさらに低くなれば電子と陽電子は対消滅を起こして急速に数密度が減少する．そのためニュートリノと電子の衝突率は急速に $G_{\mathrm{wk}}^2 (k_{\mathcal{B}}T)^5/\hbar$ より小さくなり，したがって比 Γ_ν/H は急速に 1 より小さくなる．このときニュートリノは自由膨張を始め，(2.1 節で見たように）数密度分布 n_ν は式（3.1.5）で与えられる形を保ちつつ，温度は $T_\nu \propto 1/a$ のように減少する．

より温度が低くなれば，電子の質量を考慮に入れなければならない．すると電

子，陽電子，光子（これらの粒子はすべて互いに熱平衡状態にある）の温度は単純に $1/a$ に比例しなくなる．一方で，自由膨張する無質量ニュートリノの運動量分布はフェルミ–ディラック分布を保ち続け，その温度は引き続き $1/a$ に比例して減少する*2．したがって，今から光子の温度 T とニュートリノの温度 T_ν は区別して取り扱うことにする．

光子，電子，陽電子のエントロピー密度の和は，

$$\begin{aligned} s(T) &= \frac{4a_{\mathcal{B}}T^3}{3} + \frac{4}{T}\int_0^\infty \frac{4\pi p^2\,dp}{(2\pi\hbar)^3}\left(\sqrt{p^2+m_e^2} + \frac{p^2}{3\sqrt{p^2+m_e^2}}\right) \\ &\quad \times \frac{1}{\exp\left(\sqrt{p^2+m_e^2}/k_{\mathcal{B}}T\right)+1} \\ &= \frac{4a_{\mathcal{B}}T^3}{3}\mathcal{S}(m_e/k_{\mathcal{B}}T) \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

で与えられる．ここで $a_{\mathcal{B}} = \pi^2 k_{\mathcal{B}}^4/15\hbar^3$ であり，関数 $\mathcal{S}(x)$ は以下で与えられる．

$$\mathcal{S}(x) \equiv 1 + \frac{45}{2\pi^4}\int_0^\infty y^2\,dy\left(\sqrt{y^2+x^2} + \frac{y^2}{3\sqrt{y^2+x^2}}\right)\frac{1}{\exp\sqrt{y^2+x^2}+1}. \tag{3.1.18}$$

エントロピー保存の式（3.1.1）より $a^3T^3\mathcal{S}(m_e/k_{\mathcal{B}}T)$ は一定である．ニュートリノの温度は $T_\nu \propto 1/a$ に比例するから，T_ν は $T\mathcal{S}^{1/3}(m_e/k_{\mathcal{B}}T)$ に比例することが導ける．T と T_ν は $k_{\mathcal{B}}T \gg m_e$ の時期に等しく，また，

$$\mathcal{S}(0) = 1 + 2\frac{7}{8} = 11/4 \tag{3.1.19}$$

であることから以下の結果を得る．

$$T_\nu = \left(4/11\right)^{1/3} T\,\mathcal{S}^{1/3}(m_e/k_{\mathcal{B}}T). \tag{3.1.20}$$

温度比 T/T_ν は $T > 10^{11}$ K においてほぼ 1 であり，$T = 10^{10}$ K では 1.008，$T =$

*2 厳密にいえばこれは正しくない．温度が 10^{10} K より低くても，ニュートリノの分布関数は $e^- + e^+ \to \nu + \bar{\nu}$ のような弱い相互作用過程によってわずかに影響を受ける．A. D. Dolgov, S. H. Hansen, D. V. Semikoz, *Nucl. Phys. B* **503**, 426 (1997); **543**, 269 (1999); G. Mangano, G. Miele, S. Pastor, M. Peloso, *Phys. Lett. B*, **534**, 8 (2002) を見よ．また，このトピックに関するレビューは，A. D. Dolgov, *Phys. Rep.*, **370**, 333 (2002) を見よ．弱い相互作用により，ニュートリノとプラズマの間にはわずかなエネルギーのやりとりが発生する．プラズマは電子–陽電子の対消滅によって熱せられ温度が上昇するため，弱い相互作用を通してニュートリノのエネルギー密度もわずかに上昇する．この効果は，ニュートリノの種類数を 3 から実効的な種類数 3.04 に増やすことで考慮される．本書における以下の議論では，この効果は無視することにする．

10^9 K では 1.346 まで増加する．T/T_ν の漸近値を数値計算を用いず求めてみよう．$\mathcal{S}(\infty)=1$ であるから，$k_\mathcal{B}T \ll m_e$ において式（3.1.20）は以下の値を与える．

$$T/T_\nu \to \Big(11/4\Big)^{1/3} = 1.401. \tag{3.1.21}$$

現在の時刻では $T = 2.725$ K だから，現在のニュートリノ温度は 1.945 K である．残念なことに，そのような低温のニュートリノ背景放射を直接的に検出する方法はないように思われる．

3 種類のニュートリノと反ニュートリノを合わせれば，この時期のエネルギー密度は，

$$\begin{aligned}\rho(T) &= 6\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{a_\mathcal{B}T_\nu^4}{2} + a_\mathcal{B}T^4 + 4\int_0^\infty \frac{4\pi p^2\,dp}{(2\pi\hbar)^3}\frac{\sqrt{p^2+m_e^2}}{\exp\left(\sqrt{p^2+m_e^2}/k_\mathcal{B}T\right)+1} \\ &= a_\mathcal{B}T^4\mathcal{E}(m_e/k_\mathcal{B}T)\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

で与えられ，関数 $\mathcal{E}(x)$ は以下の式で定義する．

$$\mathcal{E}(x) = 1 + \frac{21}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}\mathcal{S}^{4/3}(x) + \frac{30}{\pi^4}\int_0^\infty \frac{y^2\sqrt{y^2+x^2}dy}{\exp\sqrt{y^2+x^2}+1}. \tag{3.1.23}$$

式（3.1.17）と式（3.1.22）を式（3.1.11）に代入すれば，

$$\begin{aligned}t &= \int\left(\frac{(m_e/k_\mathcal{B}T)\mathcal{S}'(m_e/k_\mathcal{B}T)}{\mathcal{S}(m_e/k_\mathcal{B}T)} - 3\right)\frac{dT}{T\sqrt{24\pi G a_\mathcal{B}T^4\mathcal{E}(m_e/k_\mathcal{B}T)}} \\ &= t_e\int\left(3 - \frac{x\,\mathcal{S}'(x)}{\mathcal{S}(x)}\right)\mathcal{E}^{-1/2}(x)\,x\,dx\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

を得る．ここで $x \equiv m_e/k_\mathcal{B}T$ で，変数 t_e は CGS 単位系で以下のように与えられる．

$$t_e \equiv \Big(24\,\pi\,G\,c^6\,a_\mathcal{B}\,m_e^4/k_\mathcal{B}^4\Big)^{-1/2} = 4.3694\ \text{s}. \tag{3.1.25}$$

表 3.1（166 ページ）に，T/T_ν の値および温度が T まで下がるのに要する時間（式（3.1.11）より計算）を，様々な T の値に対して与える．

電子–陽電子が対消滅した後の宇宙のエネルギー密度はしばらくのあいだ光子，ニュートリノ，および反ニュートリノによって支配される．この時期これらの粒子はすべて相対論的であるから，$s(T) \propto T^3$ および以下の式が成り立つ．

表 3.1　電子–光子の温度 T とニュートリノの温度 T_ν の比，および温度が 10^{11}K から T まで下がるのに要する時間 t.

T (K)	T/T_ν	t (秒)
10^{11}	1.000	0
6×10^{10}	1.000	0.0177
3×10^{10}	1.001	0.101
2×10^{10}	1.002	0.239
10^{10}	1.008	0.998
6×10^{9}	1.022	2.86
3×10^{9}	1.080	12.66
2×10^{9}	1.159	33.1
10^{9}	1.345	168
3×10^{8}	1.401	1980
10^{8}	1.401	1.78×10^4
10^{7}	1.401	1.78×10^6
10^{6}	1.401	1.78×10^8

$$\rho(T) = a_{\mathcal{B}}T^4 + \frac{7}{8} \cdot 3 \cdot a_{\mathcal{B}}T_\nu^4 = a_{\mathcal{B}}T^4 \left(1 + \frac{7}{8} \cdot 3 \cdot (4/11)^{4/3}\right) = 3.363\, a_{\mathcal{B}}T^4/2. \tag{3.1.26}$$

すなわち，この時期の実効的粒子数は $\mathcal{N} = 3.363$ である．これより，式（3.1.14）を用いて CGS 単位系で以下の値が得られる．

$$t = \sqrt{\frac{3c^2}{3.363 \cdot 16 \cdot \pi a_{\mathcal{B}} G}}\frac{1}{T^2} + \text{積分定数} = 1.78\ \text{s}\ \left[\frac{T}{10^{10}\text{K}}\right]^{-2} + \text{積分定数}. \tag{3.1.27}$$

たとえば，宇宙が 10^9 K（電子と陽電子のほとんどが対消滅した時期）から 10^8 K まで冷えるのに要した時間は 1.76×10^4 秒，あるいは 4.9 時間だ．

式（3.1.27）によれば，宇宙がずっと高い温度から 10^6 K まで冷えるのに要する時間は 1.78×10^8 秒，あるいは 5.64 年である．より低い温度では非相対論的物質のエネルギー密度も考慮に入れなければならず，式（3.1.27）は適用できなくなる．2.3 節で見たように，$\Omega_M h^2 = 0.15$ の場合，宇宙が最終散乱時刻の温度 3000 K まで冷えるのに要した時間は 360000 年である．

* * *

本節のこれまでの議論では，ニュートリノを無質量粒子として扱ってきた．また，各種ニュートリノの正味の粒子数（ニュートリノの数から反ニュートリノの数を差し引いたもの）は光子の数よりもずっと小さいと仮定してきた．質量 m を持つ粒子の理想気体の一般論では，運動量が p から $p+dp$ の間にある粒子の数密度 $n(p)\,dp$ はフェルミ–ディラック分布，あるいはボーズ–アインシュタイン分布で与えられる．

$$n(p,T,\mu)\,dp = \frac{4\pi g p^2\,dp}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{1}{\exp[(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)/k_{\mathcal{B}}T]\pm 1}\right), \tag{3.1.28}$$

ここで μ は粒子の持つ化学ポテンシャルで，熱平衡状態下で素早く起こる反応では保存する．g は粒子と反粒子のスピン状態数を表し，正符号はフェルミ粒子，負符号はボーズ粒子を表す．化学ポテンシャルがゼロの場合，この式は式（3.1.5）に帰着し，$p \ll m$ および $k_{\mathcal{B}}T \ll m$ の場合には非相対論的粒子の数密度（式（2.3.1））を与える．上で見たように電子と陽電子は急速に対消滅し光子となるから，電子と陽電子の化学ポテンシャルは大きさが等しく符号が逆である．また，宇宙全体の平均では正味の電荷がないと仮定していることに加え，微小な数である光子 1 個あたりのバリオン数を無視していることから，電子と陽電子の化学ポテンシャルは $k_{\mathcal{B}}T$ よりもずっと小さいと結論できる．一方，ニュートリノと反ニュートリノが電子，陽電子，光子と熱平衡状態にあった温度では，$e^+ + e^- \rightleftharpoons \nu_i + \bar{\nu}_i$ のような反応が素早く起こっていた（ここで $i = e, \mu, \tau$ はニュートリノの 3 つの種類を指す）から，各種ニュートリノの化学ポテンシャル μ_i は対応する反ニュートリノの化学ポテンシャルと大きさが同じで符号が逆である．しかし，もし正味のニュートリノ数（あるいはレプトン数）がゼロでないと仮定するならば，μ_i が $k_{\mathcal{B}}T$ よりも小さくなくてはならない理由はない．

もしニュートリノの質量が 1 eV より小さければ，本節で扱っている温度ではニュートリノの質量は無視できる．太陽，原子炉，および宇宙線起源のニュートリノの観測から発見された，異なる種類間のニュートリノ振動[*3]の測定より，3 つのニュートリノ質量固有状態（質量固有状態は，電子型，ミュー粒子型，タウ

[*3] W.-M. Yao *et al.*（粒子データグループ）, *J. Phys. G.*, **33**, 1 (2006).

粒子型といったフレーバー固有状態の混合状態）が持つ質量の 2 乗の差が求められた．2 つの 2 乗質量差のうち小さな方は $8.0^{+0.4}_{-0.3} \times 10^{-5}$ eV^2 で，大きな方は 1.9×10^{-3} eV^2 と 3.0×10^{-3} eV^2 の間にある．したがって，ニュートリノの質量はすべて 1 eV よりもずっと小さいか，縮退している（すべての種類がほぼ同じ質量を持つ）ことになる．ニュートリノ質量が縮退していると考える理由は特にないが，もし縮退していれば，3 重水素の低エネルギーベータ崩壊の観測からその質量は 2 eV より小さくなければならないことが示されている[*3]．したがって明らかに，縮退の有無に関わらず全 3 種類のニュートリノ（もしニュートリノの種類が 3 種類しかなければ）の質量は 1 MeV よりもずっと小さく，ニュートリノと電子および陽電子の熱平衡状態が終わった頃，つまり温度がおよそ 10^{10} K の頃，のニュートリノは相対論的だったことになる．熱平衡状態が終われば，(1.1 節で示したように）ニュートリノの運動量は単純に $1/a$ に比例して減少する．もし化学ポテンシャルが無視できるほど小さければニュートリノの運動量分布は（分母の -1 が $+1$ になることを除けば）光子の運動量分布と同じであるが，温度は $(4/11)^{1/3}$ だけ低い．よって，$k_{\mathcal{B}}T$ がニュートリノ質量の最小値より小さくなれば，ニュートリノのエネルギー密度は単に $n_\nu \sum_\nu m_\nu = (3/11) n_\gamma \sum_\nu m_\nu$ で与えられる（$k_{\mathcal{B}}T$ が粒子の質量よりもずっと大きければ，フェルミ粒子の各スピン状態の数密度を与える積分は対応するボーズ粒子の積分の 3/4 である．ニュートリノが熱平衡を離れたあとは $T_\nu^3 = (4/11) T_\gamma^3$ である）．もし化学ポテンシャルがゼロでなければエネルギー密度は大きくなる．(ニュートリノが無質量であると仮定して構築した）理論と 2.6 節および 7.2 節で議論する宇宙マイクロ波背景放射異方性の観測結果，および 8 章で議論する大規模構造の観測結果との一致より，3 つのニュートリノ質量の和は（95%の信頼領域で）0.68 eV 以下と示されている[*4]．したがって，もしニュートリノ質量が縮退していれば各々の質量は 0.23 eV 以下である．この結果はハイデルベルグ–モスクワ実験で測定されたニュートリノを伴わない 2 重ベータ崩壊の測定結果と矛盾することが報告されており[*5]，その実験によればニュートリノ質量の和は 1.2 eV である[*6]．この 2 重ベータ崩壊実験の結果は未だ追確認されていない．今のところ，引き続きニュートリノ質量

---

*4 D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **170**, 377 (2007) [astro-ph/0603449].

*5 H. V. Klapdor-Kleingroth, I. V. Krivosheina, A. Dietz, O. Chkvorets, *Phys. Lett. B* **586**, 198 (2004).

*6 A. De La Macorra, A. Melchiorri, P. Serra, R. Bean, *Astropart. Phys.* **27**, 406 (2007) [astro-ph/0608351].

を無視する近似を用いて議論を進めても良さそうである．

ニュートリノ質量を無視すれば，種類 i のニュートリノと反ニュートリノのエネルギー密度，圧力，および正味のレプトン数密度は，

$$\begin{aligned}\rho_i &= 3p_i \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int p^3\,dp\left(\frac{1}{\exp[(p-\mu_i)/k_{\mathcal{B}}T]+1}+\frac{1}{\exp[(p+\mu_i)/k_{\mathcal{B}}T]+1}\right) \\ &= 4\pi\frac{(k_{\mathcal{B}}T)^4}{(2\pi\hbar)^3}\mathcal{P}(\mu_i/k_{\mathcal{B}}T), \qquad (3.1.29) \\ n_i &= \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int p^2\,dp \\ &\quad\times\left(\frac{1}{\exp[(p-\mu_i)/k_{\mathcal{B}}T]+1}-\frac{1}{\exp[(p+\mu_i)/k_{\mathcal{B}}T]+1}\right) \\ &= 4\pi\frac{(k_{\mathcal{B}}T)^3}{(2\pi\hbar)^3}\mathcal{M}(\mu_i/k_{\mathcal{B}}T) \qquad (3.1.30)\end{aligned}$$

で与えられ，関数 $\mathcal{P}(x)$ と $\mathcal{M}(x)$ は以下のように定義する．

$$\mathcal{P}(x) \equiv \int_0^\infty \left[\left(e^{y-x}+1\right)^{-1}+\left(e^{y+x}+1\right)^{-1}\right] y^3\,dy, \qquad (3.1.31)$$

$$\mathcal{M}(x) \equiv \int_0^\infty \left[\left(e^{y-x}+1\right)^{-1}-\left(e^{y+x}+1\right)^{-1}\right] y^2\,dy. \qquad (3.1.32)$$

既に見たように，温度が 10^{10} K 以上のときは光子と電子–陽電子対のエネルギー密度の和は $11\,a_{\mathcal{B}}T^4/4$ で圧力はその 1/3 であるから，ニュートリノの寄与も合わせた全エネルギー密度と全圧力は以下で与えられる．

$$\rho = 3p = T^4\left[\frac{11a_{\mathcal{B}}}{4}+\frac{4\pi\,k_{\mathcal{B}}^4}{(2\pi\hbar)^3}\sum_{i=e,\mu,\tau}\mathcal{P}(\mu_i/k_{\mathcal{B}}T)\right]. \qquad (3.1.33)$$

このとき，エネルギー保存の式（1.5.20）より ρa^4 は一定である．一方，各種ニュートリノの数密度の保存則より $n_i a^3$ も一定である．ρ の化学ポテンシャル依存性と n_i の化学ポテンシャル依存性は異なるから，これらのすべての条件を満たすためには宇宙膨張とともに $\mu_i/k_{\mathcal{B}}T$ が一定であることが要請され，また $T \propto 1/a$ であることも要請される．後者は化学ポテンシャルがゼロのときと同じ結果である．

温度が 10^{10} K より低くなれば光子と電子–陽電子対の温度は $1/a$ に比例しなくなるが，すでに見たようにニュートリノと反ニュートリノは自由膨張を始める．

各種ニュートリノの運動量 p は $1/a$ のように変化するから，無質量ニュートリノに対するフェルミ–ディラック分布は保存され，温度は $T_\nu \propto 1/a$ のように変化し，$\mu_i/k_{\mathcal{B}}T$ は一定に保たれる．これらの結果はちょうど熱平衡状態のときの結果と同じなので，良い近似で，いま興味のある時期すべてにおいて $T_\nu \propto 1/a$ と $\mu_i \propto 1/a$ が成り立っていると結論できる．

ニュートリノの化学ポテンシャルがゼロでなかったらどうなるだろう？　化学ポテンシャルが本節の議論に及ぼすであろう唯一の影響は，エネルギー密度の増加とその結果生じる時間の短縮である．μ がゼロでなければ関数 $\mathcal{P}(\mu/k_{\mathcal{B}}T)$ は $\mathcal{P}(0) = 7\pi^4/60$ より大きいので，$\mu_i \neq 0$ に対して $\rho_i > 7\pi^2(k_{\mathcal{B}}T)^4/120(\hbar)^3 = (7/8)a_{\mathcal{B}}T^4$ を得る．特に，$|\mu_i| \gg k_{\mathcal{B}}T$ ならば $\mathcal{P}(\mu_i/k_{\mathcal{B}}T) \simeq (\mu_i/k_{\mathcal{B}}T)^4/4$，したがって $\rho_i \simeq \pi(\mu_i)^4/(2\pi\hbar)^3 \gg a_{\mathcal{B}}T^4$ となるから，これらのニュートリノ（あるいは，$\exp(-\mu_i/k_{\mathcal{B}}T)$ が大きければ反ニュートリノ）は，少なくとも非相対論的物質と放射の密度が等しくなる時期までは，宇宙のエネルギー密度を支配できたことになる．式（3.1.28）を見てみると，化学ポテンシャルが $\mu \gg k_{\mathcal{B}}T$ のときのフェルミ粒子の分布関数 $n(p,T,\mu)dp$ は，粒子のエネルギーが μ より小さいときには $4\pi g p^2 dp/(2\pi\hbar)^3$ で与えられ，それより大きなエネルギーでは急速に減少する．したがって，フェルミ粒子のエネルギー準位はエネルギー μ を持つ準位まですべて埋まっており，μ よりも高いエネルギーを持つ準位は空である．このような状態を完全縮退状態と呼ぶ*7．3 重水素のベータ崩壊 ${}^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He} + e^- + \bar{\nu}_e$ の実験より，$|\mu_e|$ は数 eV 以下であることが示されている．というのは，もし $\mu_e > 0$ であれば，$\nu_e + {}^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He} + e^-$ という反応を通じて縮退状態にある宇宙背景ニュートリノが吸収され，測定される電子のスペクトルがニュートリノがない場合に予想される終点 $m({}^3\mathrm{H}) - m({}^3\mathrm{He})$ を超えて上昇するからである．また，もし $\mu_e < 0$ であれば，パウリの排他原理より，縮退状態にあってエネルギーが μ 以下の全準位が埋まっている反ニュートリノにさらに反ニュートリノを足せないことから，終点から数 eV 以内の電子スペクトルに**へこみ**が現れる（電子スペクトルの終点から数 eV 以内にへこみが見られないことから，電子型ニュートリノの質量が数 eV 以下であることも導ける）．この測定より，時間に依存しない量 $|\mu_e|/k_{\mathrm{B}}T$ が 10^4 以下であるという制限がつけられる．この制限は，次節で宇宙論的元素合成を用いて得られるものよりずっと弱い．

---

*7 宇宙背景ニュートリノの縮退可能性は，S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **128**, 1457 (1962) によって提起された．

3.2　宇宙の元素合成

10^{10} K を超える高温状態から始まり，放射と物質の密度が等しくなる温度 ≈ 10^4 K までの宇宙の熱史を学んできたが，これまでは数の少ない核子の存在（および電子と陽電子の数のわずかな差）を無視してきた．本節では，この時期では核子に何が起こるのか考える*1.

弱い相互作用により，中性子と陽子は以下の 6 つの過程を通じて互いに移り変わる．

$$n+\nu \rightleftharpoons p+e^-, \qquad n+e^+ \rightleftharpoons p+\bar{\nu}, \qquad n \rightleftharpoons p+e^-+\bar{\nu}. \tag{3.2.1}$$

（ここで ν は電子型ニュートリノ ν_e を表す．他の型のニュートリノはこれらの反応に寄与しない．）いま考えている温度は核子の質量よりも十分小さい（$k_{\mathcal{B}}T \ll m_N$）ので，核子は静止しているものとして扱って良い．したがって，レプトンの初期エネルギーと最終エネルギーは単純に以下の関係で結びつけられる．

---

*1　これらの計算の歴史は，私の以前の著作 **The First Three Minutes**, Basic Books (1977, 1988)（邦訳『宇宙創成はじめの 3 分間』）で概観している．手短にいえば，宇宙の元素合成の最初の計算は 1940 年代にラルフ・アルファー，ジョージ・ガモフ，ロバート・ハーマンによって行われた（G&C 第 15 章の脚注 51 と 52 も見よ）．この仕事では，初期に存在した核子は純粋に中性子のみであり，それらが後に中性子のベータ崩壊によって陽子に転化したと仮定されていた．その後，中性子と陽子が互いに移り変わる反応は主に 2 体衝突を通して起こり，初期宇宙ではこれらの反応の反応率が非常に大きいことから，核子の正しい初期条件はむしろ中性子 50%，陽子 50% であることが林忠四郎によって示された（*Prog. Theor. Phys. Japan* **5**, 224 (1950)）．この仕事を受け，中性子と陽子の存在比率の進化に関する計算がアルファー，フォリン，ハーマンによって行われた（A. Alpher, J. W. Follin, Jr., R. C. Herman, *Phys. Rev.* **92**, 1347 (1953)）が，それは宇宙の元素合成問題に適用されたわけではなかった．一方で何人かの研究者たちにより，観測されている宇宙のヘリウム存在量が，恒星内部の元素合成のみで生成するには大き過ぎることが指摘されていた．G. Burbidge, *Pub. Astron. Soc. Pacific* **70**, 83 (1958); F. Hoyle, R. J. Tayler, *Nature* **203**, 1108 (1964) を見よ．現在の宇宙の元素合成理論はピーブルスによるものである（P. J. E. Peebles, *Astron. J.* **146**, 542 (1966)）．関連する仕事はゼルドヴィッチ（Ya. B. Zel'dovich, *Adv. Astron. Astrophys.* **3**, 241 (1965)）によってもなされていたが，ずっと後になるまで西側諸国で知られることはなかった．その後，元素合成の計算はより多くの元素や反応を含むように拡張され（R. V. Wagoner, W. A. Fowler, F. Hoyle, *Astrophys. J.* **148**, 3 (1967)），多くの小さな効果が取り入れられた（D. A. Dicus, E. W. Kolb, A. M. Gleeson, E. C. G. Sudarshan, V. L. Teplitz, M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **26**, 2694 (1982)）．この分野に関する最近のレビューは，G. Steigman, in *Measuring and Modeling the Universe – Carnegie Observatories Astrophysics Series*, Volume 2, ed. W. Freedman, Cambridge University Press [astro-ph/0307244]; in *The Local Group as an Astrophysical Laboratory – Proceedings of the May* 2003 *STScI Symposium* [astro-ph/0308511]; in *Chemical Abundances and Mixing in Stars in the Milky Way and its Satellites – Proceedings of the ESO/Arcetrei Workshop*, eds. L. Pasquini, S. Randich, Springer–Verlag [astro-ph/0501591]，および *Int. J. Mod. Phys.* **E15**, 1 (2006) [astro-ph/0511534] を見よ．数値計算ではなく解析的な計算に重点を置いた議論は G&C の 15.7 節，あるいは V. Mukhanov, *Int. J. Theor. Phys.* **43**, 669 (2004) [astro-ph/0303073] を見よ．

$$\begin{aligned} E_e - E_\nu = Q \quad & n + \nu \rightleftharpoons p + e^-, \\ E_\nu - E_e = Q \quad & n + e^+ \rightleftharpoons p + \overline{\nu}, \\ E_\nu + E_e = Q \quad & n \rightleftharpoons p + e^- + \overline{\nu}, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

ここで Q は,

$$Q = m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV} \tag{3.2.3}$$

である．1 個の中性子が陽子に変わる，あるいは 1 個の陽子が中性子に変わる反応率はそれぞれ以下の形で書ける．

$$\lambda(n \to p) = A \int \left(1 - \frac{m_e^2}{(Q+q)^2}\right)^{1/2} \frac{(Q+q)^2 q^2 dq}{\left(1 + e^{q/k_{\mathcal{B}} T_\nu}\right)\left(1 + e^{-(Q+q)/k_{\mathcal{B}} T}\right)}, \tag{3.2.4}$$

$$\lambda(p \to n) = A \int \left(1 - \frac{m_e^2}{(Q+q)^2}\right)^{1/2} \frac{(Q+q)^2 q^2 dq}{\left(1 + e^{-q/k_{\mathcal{B}} T_\nu}\right)\left(1 + e^{(Q+q)/k_{\mathcal{B}} T}\right)}, \tag{3.2.5}$$

A は以下の式で定義される量で*2,

$$A \equiv \frac{G_{\text{wk}}^2 \left(1 + 3g_A^2\right) \cos^2 \theta_C}{2\pi^3 \hbar}, \tag{3.2.6}$$

q に渡る積分範囲は $-\infty$ から $+\infty$ までとるが，平方根が虚数となる $q = -Q - m_e$ から $q = -Q + m_e$ は積分範囲から除く．これらの反応率は，すでに埋まっているレプトンのエネルギー準位によるパウリの排他律の効果を含んでいる．たとえば，過程 $n + e^+ \to p + \overline{\nu}$ の反応断面積は $2\pi^2\hbar^3 A E_\nu^2 / v_e$，運動量が p_e と $p_e + dp_e$ の間にある陽電子の個々のヘリシティ状態の数密度は $4\pi p_e^2 dp_e (2\pi\hbar)^{-3} \left[\exp(E_e/k_{\mathcal{B}} T) + 1\right]^{-1}$，そしてエネルギー E_ν を持つ反ニュートリノのエネルギー準位のうち，まだ埋まっていないものの割合は,

$$1 - \left[\exp(E_\nu/k_{\mathcal{B}} T_\nu) + 1\right]^{-1} = \left[\exp(-E_\nu/k_{\mathcal{B}} T_\nu) + 1\right]^{-1}$$

---

*2 ここで，$G_{\text{wk}} = 1.16637(1) \times 10^{-5}\ \text{GeV}^{-2}$ は弱い相互作用の結合定数で，その値は崩壊過程 $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ の反応率の測定から求められている．$g_A = 1.257$ はベータ崩壊の軸性ベクトル結合定数で，中性子崩壊の反応率から求められている．θ_C はカビボ角で，その値 $\cos\theta_C = 0.9745(6)$ は O^{14} のベータ崩壊と他の $0^+ \to 0^+$ 遷移の反応率から求められている．

で与えられるから，過程 $n+e^+ \to p+\overline{\nu}$ の 1 個の中性子あたりの反応率は，

$$\lambda(n+e^+ \to p+\overline{\nu}) = A\int_0^{\infty} E_\nu^2 p_e^2 dp_e \left[\exp(E_e/k_{\mathcal{B}}T)+1\right]^{-1} \times \left[\exp(-E_\nu/k_{\mathcal{B}}T_\nu)+1\right]^{-1}$$

で与えられる．積分変数を $q \equiv -E_\nu = -Q - E_e$ に変えれば，この反応率は式 (3.2.4) の積分のうち $q=-\infty$ から $q=-Q-m_e$ までの寄与に相当することがわかる．同様に，$q=-Q+m_e$ から $q=0$ までの寄与に相当するのは中性子の崩壊過程 $n \to p+e^- + \overline{\nu}$（ただし $q=-E_\nu$）で，$q=0$ から $q=+\infty$ までの寄与に相当するのは $n+\nu \to p+e^-$（ただし $q=E_\nu$）である．同様なことが式 (3.2.5) の積分にもあてはまる．

反応率が式 (3.2.4)–(3.2.5) で与えられるので，中性子と全核子の数密度比 X_n の変化率を以下の微分方程式から計算できる．

$$\frac{dX_n}{dt} = -\lambda(n\to p)X_n + \lambda(p\to n)(1-X_n). \tag{3.2.7}$$

この式の正しさを確認するため，温度 T が時間に依存せず T_ν に等しい場合を考えてみよう．この時，式 (3.2.4) と式 (3.2.5) で与えられる 2 つの反応率の比は以下で与えられる．

$$\frac{\lambda(p\to n)}{\lambda(n\to p)} = \exp\Big(-Q/k_{\mathcal{B}}T\Big) \qquad (T=T_\nu \text{ の場合}). \tag{3.2.8}$$

すると，式 (3.2.7) は熱平衡時に期待される時間依存しない解，

$$\frac{X_n}{X_p} = \frac{X_n}{1-X_n} = \exp\Big(-Q/k_{\mathcal{B}}T\Big) \tag{3.2.9}$$

と等しいことが導ける．したがって，T と T_ν が等しくない場合，およびこれらの温度が時間変化する場合に X_n/X_p は式 (3.2.9) で与えられる平衡状態の値からずれる．

$k_{\mathcal{B}}T \gg Q$ のときは $T_\nu = T$ および $Q=m_e=0$ とすることで式 (3.2.4)–(3.2.5) の積分を評価できる．

$$\lambda(n\to p) = \lambda(p\to n) = A\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^4\,dq}{\left(1+e^{q/k_{\mathcal{B}}T}\right)\left(1+e^{-q/k_{\mathcal{B}}T}\right)}$$

$$= \frac{7}{15}\pi^4 A(k_{\mathcal{B}}T)^5 = 0.400\ \mathrm{s}^{-1}\left(\frac{T}{10^{10}\,\mathrm{K}}\right)^5. \tag{3.2.10}$$

これを宇宙の膨張率と比較してみよう．温度が非常に高温な状態から T まで下がるのに要する時間は式（3.1.16）で与えられ，$0.99\ \mathrm{s}\left(T/10^{10}\mathrm{K}\right)^{-2}$ である．宇宙の膨張率は $H \simeq 1/2t$ と書けるから，λ との比 λ/H は以下で与えられる．

$$\lambda/H \simeq 0.8 \times \left(\frac{T}{10^{10}\,\mathrm{K}}\right)^3. \tag{3.2.11}$$

この比は $T > 1.1 \times 10^{10}$ K のとき 1 よりも大きい．しかし，この下限値付近の温度 T は $Q/k_{\mathcal{B}}$ と比べてさほど大きくなく，T_ν の値も T と正確に一致するわけではない．したがって $\lambda(n \to p)$ と $\lambda(p \to n)$ は正確に等しくなく，どちらも式（3.2.10）で与えられる値とは正確に一致しない．それでも式（3.2.10）は反応率のおおまかな大きさを与えるので，$\lambda(n \to p)/H$ と $\lambda(p \to n)/H$ の値がこれらの温度において 1 よりも大きいという結論は変わらない．これは，温度が 3×10^{10} K 程度よりも高いとき，X_n の初期値は式（3.2.7）の右辺がゼロであるという条件から導けることを意味する．

$$X_n \to \frac{\lambda(p \to n)}{\lambda(p \to n) + \lambda(n \to p)}. \tag{3.2.12}$$

X_n がこの値よりも大きければ式（3.2.7）の右辺は負となり，小さければ正となるが，その絶対値が大きいため X_n は急速に式（3.2.12）で与えられる値に落ち着く．$T > 10^{10}$ K のとき，ニュートリノの温度は光子–電子–陽電子の温度と 1% 以内の精度で一致するので反応率は式（3.2.8）で与えられる．ゆえに，温度が $T > 3 \times 10^{10}$ K のときの中性子の存在比率は平衡状態の式（3.2.12）で与えられ，以下の単純な形をとる．

$$X_n = \frac{1}{1 + \exp(Q/k_{\mathcal{B}}T)}. \tag{3.2.13}$$

すなわち，レプトンの化学ポテンシャルがゼロであるという条件を課せば，高温下における X_n の初期値が完全に決まってしまう．これは大変重要なことで，そうでなければ我々は中性子–陽子比の初期値を適当に仮定せねばならなかっただろう．式（3.2.13）で与えられる初期条件を用い，式（3.2.7）の積分を数値的に計算した結果を表 3.2 に示す[*3]．

[*3] これらの結果は G&C の表 15.5 で与えたものと少し異なっている．1972 年当時は 2 種類のニュートリノしか知られていなかったが，本書では 3 種類の無質量ニュートリノの存在を仮定しているため，ある温度における宇宙の膨張率が若干大きい．また，式（3.2.6）に現れるベータ崩壊の軸性ベクトル結合定数に現在の測定値 1.257 を採用した．G&C では当時の測定値 1.18 を用いていた．

表 3.2 中性子の存在比率 X_n を温度および時間の関数として示す（ただし重水素やヘリウムといった原子核の形成は無視する）.

T (K)	t (秒)	X_n
10^{12}	0.0001	0.4962
3×10^{11}	0.0011	0.4875
10^{11}	0.0099	0.4626
3×10^{10}	0.1106	0.3798
10^{10}	1.008	0.2386
3×10^{9}	12.67	0.1654
1.3×10^{9}	91.09	0.1458
1.2×10^{9}	110.2	0.1425
1.1×10^{9}	135.1	0.1385
10^{9}	168.1	0.1333
9×10^{8}	212.7	0.1268
8×10^{8}	274.3	0.1182
7×10^{8}	362.6	0.1070
6×10^{8}	496.3	0.0919
3×10^{8}	1980	0.0172
10^{8}	17780	3.07×10^{-10}

すでに見たように $k_{\mathcal{B}}T > m_e$ では比 $\lambda(p \to n)/H$ と $\lambda(n \to p)/H$ はほぼ T^3 に比例して変化するから，温度が 3×10^{10} K と 10^{10} K の間で $\lambda \gg H$ となって突然に平衡期が終わる．その少し後，温度が 10^{10} K と 3×10^{9} K の間にあるときは電子と陽電子が対消滅するため，中性子–陽子の 2 体あるいは 3 体反応率が非常に小さく無視できるようになる．このため，中性子が陽子に変化する反応のほとんどは中性子の崩壊を通して行われ，中性子の存在比率は $\exp(-t/\tau_n)$ に比例するようになる．ここで τ_n は中性子崩壊の平均寿命で，測定値は 885.7 ± 0.9 秒だ．これは表 3.2 で与えた数値計算の結果を中性子崩壊率の測定値を用いた指数関数と比べることで確認でき，その結果は以下で与えられる．

$$X_n \to 0.1609 \, \exp\left(\frac{-t}{885.7 \text{ s}}\right). \tag{3.2.14}$$

中性子は原子核の中でなら安定に存在できるから，中性子が陽子に変わる反応は原子核の形成とともに終わる．この過程を見る上で，以下の事項に留意して

おこう．熱平衡（および化学平衡）状態では，ある種 i の原子核の数密度は式 (2.3.1) のような公式で与えられる．

$$n_i = g_i e^{\mu_i/k_B T} \left(\frac{2\pi m_i k_B T}{h^2}\right)^{3/2} \exp(-m_i/k_B T), \tag{3.2.15}$$

ここで m_i は原子核 i の質量，g_i はスピン状態の数である．もしこれらの原子核が Z_i 個の陽子と $A_i - Z_i$ 個の中性子から急激に作られたとすれば，原子核 i の化学ポテンシャルは以下の式で与えられる．

$$\mu_i = Z_i \mu_p + (A_i - Z_i)\mu_n. \tag{3.2.16}$$

そして，それぞれの数密度を以下のように組み合わせることで，不明な核子の化学ポテンシャルを含まない式を導くことができる．

$$\frac{n_i}{n_p^{Z_i} n_n^{A_i - Z_i}} = \frac{g_i}{2^{A_i}} A_i^{3/2} \left(\frac{2\pi m_N k_B T}{h^2}\right)^{3(1-A_i)/2} e^{B_i/k_B T}, \tag{3.2.17}$$

ここで B_i は以下で定義される束縛エネルギーを表す．

$$m_i = Z_i m_p + (A_i - Z_i) m_n - B_i. \tag{3.2.18}$$

（式 (3.2.17) を導く際，指数の外側にある束縛エネルギーと中性子–陽子の質量差を無視した．）式 (3.2.17) は以下のように定義する無次元の比で表すことができる．

$$X_i \equiv n_i/n_N, \qquad X_p \equiv n_p/n_N, \qquad X_n \equiv n_n/n_N, \tag{3.2.19}$$

ここで n_N は全核子の数密度だ．これらの無次元量を用いれば，

$$X_i = \frac{g_i}{2} X_p^{Z_i} X_n^{A_i - Z_i} A_i^{3/2} \varepsilon^{A_i - 1} e^{B_i/k_B T} \tag{3.2.20}$$

と書け，ε は無次元量，

$$\begin{aligned} \varepsilon &\equiv \frac{1}{2} n_N h^3 (2\pi m_N k_B T)^{-3/2} \\ &= 2.96 \times 10^{-11} \left(\frac{a}{10^{-10} a_0}\right)^{-3} \left(\frac{T}{10^{10}\,\mathrm{K}}\right)^{-3/2} \Omega_B h^2 \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

として定義する．ここで全核子（束縛，自由に関わらず）の数密度として $n_N = 3\Omega_B H_0^2 (a_0/a)^3 / 8\pi G m_N$ を用いた．いま考えている時期（電子–陽電子の対消滅後）では温度 T は $1/a$ に比例するから，式 (3.2.21) は以下のように書き換えられる．

$$\varepsilon = 1.46 \times 10^{-12} \left(\frac{T}{10^{10}\,\mathrm{K}}\right)^{+3/2} \Omega_B h^2. \tag{3.2.22}$$

これはいま考えている温度では非常に小さいから，平衡状態における原子核 i の存在量は，温度が以下の値に下がるまでは無視できるほど小さい．

$$T_i \simeq \frac{B_i}{k(A_i - 1)|\ln \varepsilon|}. \tag{3.2.23}$$

$\Omega_B h^2 \simeq 0.02$ を代入すれば，この温度は重水素の場合 0.75×10^9 K，H^3 の場合 1.4×10^9 K，He^3 の場合 1.3×10^9 K，そして He^4 の場合 3.1×10^9 K となる．これらの温度の $\Omega_B h^2$ 依存性は非常に弱い．より重い原子核の核子あたりの束縛エネルギーは He^4 と同程度であるから，その T_i も He^4 のものと同程度の値となる．

仮に，温度が約 10^{10} K から 10^9 K 以下に下がる時期に熱平衡と化学平衡が成り立っていたとするならば，この時期には He^4 およびそれより重い原子核がまず現れ，次に He^3 と H^3（これは後に He^3 にベータ崩壊する），そして最後に H^2 が現れるだろう．しかし，実際にはそうはならない．この時期の核子の数密度は，2 体反応以外の反応率が宇宙膨張率より大きくなるにはすでに小さすぎるため，原子核は 2 体反応を繰り返すことでしか生成されない．まず $p+n \to d+\gamma$，次に $d+d \to H^3+p$ と $d+d \to He^3+n$，そして $d+H^3 \to He^4+n$ と $d+He^3 \to He^4+p$ および光子を含むより遅い過程，というようにつながっていく．

最初のステップには何の障害もない．自由な中性子 1 個あたりの重水素の生成率は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\lambda_d &= 4.55 \times 10^{-20}\mathrm{cm}^3/\mathrm{s} \times n_p = 511\,\mathrm{s}^{-1} \left(\frac{a}{10^{-9}a_0}\right)^{-3} X_p\, \Omega_B h^2 \\ &= 2.52 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1} \left(\frac{T}{10^{10}\,\mathrm{K}}\right)^3 X_p\, \Omega_B h^2.\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

式（3.1.27）で与えられる時間を積算すれば，

$$\lambda_d t \simeq 4.5 \times 10^4 \left(\frac{T}{10^{10}\,\mathrm{K}}\right) X_p\, \Omega_B h^2 \tag{3.2.25}$$

が得られる．これは温度が 10^9 K 以下になるまでは 1 より十分大きい．したがって，いま考えている時期の重水素の存在量は平衡状態の値で良く近似でき，式 (3.2.20) を用いれば以下のように与えられる．

$$X_d = 3\sqrt{2} X_p X_n \varepsilon \exp\left(\frac{B_d}{k_B T}\right). \tag{3.2.26}$$

問題はここからだ．重水素の束縛エネルギーが小さいため，$T_d \approx 0.7 \times 10^9$ K は他の T_i と比べてとても低い．つまり重水素の存在量は，熱平衡状態なら He^4 が豊富に存在できる温度でも非常に小さいままである．重水素の存在量が小さいままでは重水素の 2 体相互作用 $d + d \to H^3 + p$，$d + d \to He^3 + n$ の重水素 1 個あたりの反応率が小さく，元素合成が進まない（重水素の存在量が小さくても，放射過程 $p + d \to He^3 + \gamma$，$n + d \to H^3 + \gamma$ の**重水素 1 個あたりの**反応率は影響を受けないため，これらの反応過程も現在の元素合成の計算に含まれている．しかし，これらの過程の反応断面積はそもそも小さい）．温度が T_d より低くなってようやく，まだ残っていた中性子が急速に軽元素中最も束縛の強い元素 He^4 を合成するのに使われる．He^4 より重い元素の合成は，原子番号 5 と 8 を持つ安定な元素が存在しないために進まない（この障害は，恒星中ならば乗り越えられる[*4]．2 つの He^4 原子核の衝突により不安定な原子核 Be^8 が短期間生成され，それが He^4 原子核をもう 1 つ捕獲することで C^{12} の励起状態が生成される．しかし初期宇宙では，この反応が起こるだけの十分な時間がない）．ゆえに良い近似で，初期宇宙で生成される He^4 の質量比 Y は，重水素の存在量が十分大きくなってより重い元素の合成が可能となった時刻の中性子と全核子数の比 X_n を 2 倍（He^4 中には中性子 1 個あたりに陽子が 1 つあるため）したものに等しい[*5]．

宇宙初期の元素合成によるヘリウム生成は，T_d よりも少し温度の高いところで起こる．重水素からより重い元素を作る最初のステップは $d + d \to H^3 + p$，$d + d \to He^3 + n$ といった反応だが，これらは発熱反応で，初期速度が小さい極限 $v \to 0$ では反応断面積が $1/v$ に比例する．いま考えている温度では，

$$\langle \sigma\Big(d + d \to \mathrm{H}^3 + p\Big) v \rangle \simeq 1.8 \times 10^{-17}\,\mathrm{cm}^3\ \mathrm{s}^{-1},$$

$$\langle \sigma\Big(d + d \to \mathrm{He}^3 + n\Big) v \rangle \simeq 1.6 \times 10^{-17}\,\mathrm{cm}^3\ \mathrm{s}^{-1}$$

で，1 個の重水素あたりの全反応率は以下で与えられる[*6]．

[*4] E. E. Salpeter, *Astrophys. J.*, **115**, 326 (1952).

[*5] もう少し詳しく述べよう．n_{He} を単位固有体積あたりのヘリウム原子核の数，n_{H} を水素原子核の数とする．単位固有体積あたりのヘリウム原子核の質量は原子質量単位で $4n_{\mathrm{He}}$ と書ける．一方，単位固有体積あたりの全原子核質量は $4n_{\mathrm{He}} + n_{\mathrm{H}}$ であるから，ヘリウムの質量比は $Y = 4n_{\mathrm{He}}/(4n_{\mathrm{He}} + n_{\mathrm{H}})$ で与えられる．単位固有体積あたりの陽子と中性子の数はそれぞれ $n_p = 2n_{\mathrm{He}} + n_{\mathrm{H}}$ と $n_n = 2n_{\mathrm{He}}$ であるから，中性子と全核子数の比は $X_n = 2n_{\mathrm{He}}/(4n_{\mathrm{He}} + n_{\mathrm{H}})$ と書け，$Y = 2X_n$ が導ける．

[*6] V. Mukhanov，脚注 1 を参照．

$$\Lambda = \left[\langle\sigma\left(d+d \to \mathrm{H}^3 + p\right)v\rangle + \langle\sigma\left(d+d \to \mathrm{He}^3 + n\right)v\rangle\right] X_d n_N$$

$$\simeq 1.9 \times 10^7 \left(T/10^{10}\,\mathrm{K}\right)^3 \left(\Omega_B h^2\right) X_d\ \mathrm{s}^{-1}.$$

この反応率を宇宙の膨張率と比べてみよう．電子–陽電子の対消滅後の膨張率は式（3.1.27）によって $H = 1/2t = 0.28(T/10^{10}\,\mathrm{K})^2\ \mathrm{s}^{-1}$ と与えられる．したがって T が 10^9 K あたりにあるときは $X_d \simeq 1.2 \times 10^{-7}/\Omega_B h^2$（$\Omega_B h^2 = 0.02$ のとき 0.6×10^{-5}）において $\Lambda = H$ となる．この X の値は熱平衡時に温度 $\simeq 10^9$ K で達成され（正確な温度は $\Omega_B h^2$ に若干依存する），したがって元素合成は 0.75×10^9 K ではなく 10^9 K で始まる．表 3.2 を見るとこれは $t = 168$ 秒に対応し，式（3.2.14）を用いればこの時刻で生成されるヘリウムの質量比は以下で与えられる．

$$Y_p \simeq 2 \times 0.1609 \times \exp(-168/885) \simeq 0.27.$$

（慣用的に用いられている下付き添字 p はヘリウムの「原始（primordial)」存在量を表す.）核子の数密度が大きければ元素合成はより高い温度で始まるから，中性子の崩壊は進まず，最終的な He^4 の存在量は増加する．元素合成に関する現在の計算結果は，たいていの場合核子と光子の数密度比 η の関数として与えられる．式（2.1.12）と（2.1.13）を用いれば η と $\Omega_B h^2$ の関係式,

$$\Omega_B h^2 = 3.65\,\eta \times 10^7$$

が導け，たとえば $\Omega_B h^2 = 0.02$ は $\eta = 5.5 \times 10^{-10}$ に対応する（ある温度における核子の数密度は現在の宇宙マイクロ波背景放射の温度を知らなくても η で書くことができる．このため，宇宙マイクロ波背景放射の温度が正確にわかっていなかった 1990 年代には $\Omega_B h^2$ よりも η の方が便利な量として用いられていた)．詳細な計算*7によれば，$\eta = 2 \times 10^{-10}$ のときは $Y_p = 0.232$，$\eta = 4 \times 10^{-10}$ のときは $Y_p = 0.240$ である．

ヘリウムと水素の原始存在量比は HII 領域（電離水素領域）のスペクトル観測から推定されている．HII 領域は「金属量」（水素・ヘリウム以外の元素量）の低いものが選ばれ，特にまだ多くの星形成が起こっていない青いコンパクトな銀河（blue compact galaxies）中の HII 領域が好んで用いられる．1990 年代の観測は，小さい値 $Y_p = 0.234 \pm 0.002 \pm 0.005$ を出すグループ*8と大きい値 $Y_p = 0.243 \pm$

*7 R. E. Lopez, M. S. Turner, *Phys. Rev. D*, **59**, 103502 (1999) [astro-ph/9807279].

*8 K. A. Olive, G. Steigman, *Astrophys. J. Suppl.*, **97**, 49 (1995); K. A. Olive, E. Skillman, G. Steigman, *Astrophys. J.*, **483**, 788 (1997).

0.003 を出すグループ[*9]に二分されていたが，どちらの値であるにせよ，ヘリウム存在量の観測は確かに光子が支配する熱い宇宙，すなわち η が 10^{-10} から 5×10^{-10} の領域にある宇宙を示していた．より最近の HII 領域の観測，およびそのスペクトル観測のデータを解釈する際に用いられる原子データの改良により，より正確な値：$Y_p = 0.2477 \pm 0.0029$[*10]が得られ，これより $\eta = (5.813 \pm 1.81)\times10^{-10}$ が得られている．ヘリウム存在量の観測から得られる η の値の不定性はまだかなり大きいが，これは Y_p の値の η 依存性が弱いためだ．

ヘリウムの存在量は，η の値を測るよりも宇宙の膨張率を測るのにより適している．仮に，温度が 10^{11} K と 10^{10} K の間で熱平衡状態を終えたニュートリノの種類が（3 つでなく）4 つあったとしよう．すると温度が 3×10^9 K 以下で存在する粒子の実効的な種類数は 3.363 でなく $2+(7/8)\cdot 8\cdot(4/11)^{4/3} = 3.817$ となり，3×10^9 K からより低い温度に下がるのに要する時間は $\sqrt{3.363/3.817} = 0.94$ 倍だけ短くなる．ある温度に達するまでの時間が短くなれば中性子崩壊がその分進まず，ある温度における中性子の量が増える．その結果，元素合成の温度 $T \simeq 10^9$ K で生成されるヘリウムの量も増えることになる．実際，電子–陽子が対消滅する期間に対応する 3×10^{10} K から 3×10^9 K までの時間の短縮がヘリウムの存在量に最も大きな影響を与えることがわかっている．詳細な計算[*11]によれば，ニュートリノの種類が 1 つ増えれば，Y の値は $\eta = 10^{-10}$ のときは 0.01276 だけ増加し，$\eta = 5\times10^{-10}$ のときは 0.01369 だけ増加する．Z^0 の崩壊幅（崩壊過程の一部は観測にかからない過程 $Z^0 \to \nu + \bar{\nu}$）の測定によってニュートリノの種類数が正確に 3 であることが知られる以前に，ヘリウム存在量の観測値と理論値の整合性よりニュートリノの種類数が 4 以下であるという制限が得られていた（厳密にいえば，Z^0 の崩壊幅の観測によって制限されるニュートリノはその質量が $m_Z/2 = 45.6$ GeV 以下のものに限られるが，ヘリウム存在量の観測によって制限されるのは質量が 1 MeV 以下のものに限られる）．Z^0 の崩壊幅の測定から質量の小さいニュートリノの種類数が 3 より大きくないことが示されてはいるが，初期宇宙の名残りとして他にも質量の小さな粒子があった可能性もあり，そのよう

---

*9 Y. I. Izotov, T. X. Thuan, V. A. Lipovetsky, *Astrophys. J.*, **435**, 647 (1994); *Astrophys. J. Suppl.*, **108**, 1 (1997); Y. I. Izotov, T. X. Thuan, *Astrophys. J.*, **497**, 227 (1998); **500**, 188 (1998).

*10 A. Peimbert, M. Peimbert, V. Luridiana, *Astrophys. J.*, **565**, 668 (2002); V. Luridiana, A. Peimbert, M. Peimbert, M. Cerviño, *Astrophys. J.*, **592**, 846 (2003); M. Peimbert, V. Luridiana, A. Peimbert, *Astrophys. J.*, **667**, (2007) [astro-ph/0701580].

*11 R. E. Lopez, M. S. Turner，脚注 7 を参照.

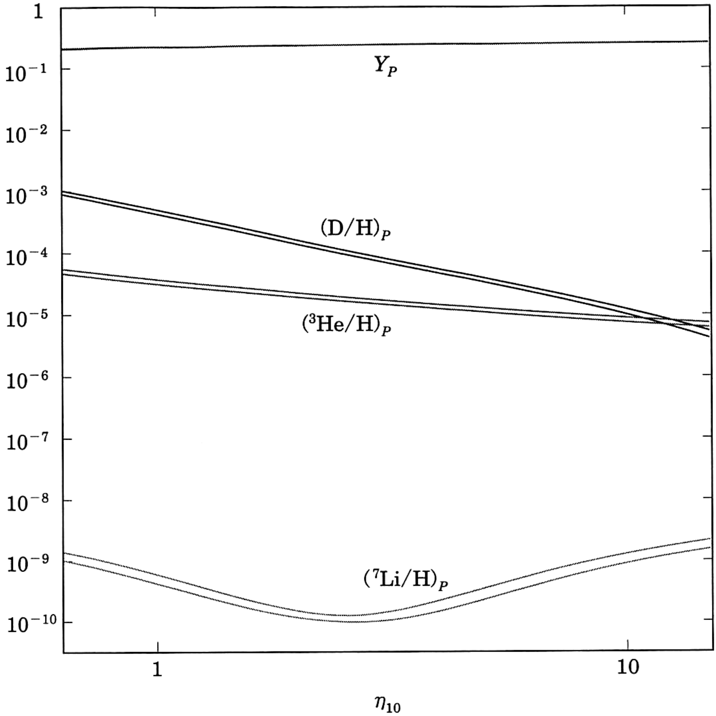


図 3.1 元素合成の理論から計算された重水素，He^3，Li^7 の原始存在量と水素の存在量の比，および He^4 の原始存在量に相当する質量と全核子の質量の比を $\eta_{10} \equiv 10^{10}\eta$ の関数として示す．η は現在の宇宙における核子の数密度と光子の数密度の比．帯の幅は計算に用いられた核反応率の数値の不定性を表す．G. Steigman, *Int. J. Mod. Phys.* **E15**, 1 (2006) [astro-ph/0511534] より抜粋.

な粒子の存在とそれに伴う宇宙膨張率の変化に対しては，依然としてヘリウム存在量の測定が有用な上限値を与えている．

$T \approx 10^9$ K で自由な中性子からヘリウムが生成されるのだが，すべてがヘリウム He^4 になってしまうわけではなく，焼け残りの灰のように他の軽元素[*12]，H^2，H^3，He^3，Li^7，Be^7 も残る．H^3 の原子核は β^+ 崩壊によって He^3 となり，Be^7

[*12] 以下に引用する軽元素存在量の数値は文献 S. Burles, K. M. Nollett, M. S. Turner, *Astrophys. J.*, **552**, L1 (2001) に与えられている.

の原子核は電子捕獲によって Li^7 となるから，最終的には H^2，He^3，Li^7，そして陽子と He^4 が残される．図 3.1（181 ページ）に元素合成の理論から計算された軽元素の存在量を示す．

バリオンの密度が大きければより多くの中性子が He^4 の生成に使われるから，残った重水素の存在量は小さくなるはずである．既に見たように，元素合成は重水素の存在比が $X_d \simeq 1.2 \times 10^{-7}/\Omega_B h^2$（$\Omega_B h^2 = 0.02$ のときは $X_d \simeq 0.6 \times 10^{-5}$）に達したときに始まる．その後温度が下がって式 (3.2.26) の指数が増加するに従い，しばらくの間重水素の存在比は増加するが，多くの自由な中性子が重水素になると式 (3.2.26) の X_n が小さくなり，次に重水素から H^3 および He^3，さらには He^4 が生成されるに従って，X_d は減少に転じる．図 3.1 に示す重水素の最終的な存在比は $T = 10^9$ K で計算した熱平衡の値 $X_d \simeq 1.2 \times 10^{-7}/\Omega_B h^2$ とそれほど違わない．ここで重要なのは，$\Omega_B h^2$ が増加するに従って X_d が大きく減少することである．

重水素の原始存在量の測定は，重水素の束縛エネルギーが小さく恒星内ですぐに壊されてしまうため容易ではない．このため，重水素存在量の測定は原始存在量に対する下限値を与え，したがってバリオン密度に対する上限値を与える．

これまでに，重水素–水素の存在量比は様々な手法を用いて測定されてきた．

1. **星間物質**．星間物質のスペクトル観測より*13，重水素–水素比として $(1.60 \pm 0.09^{+0.05}_{-0.10}) \times 10^{-5}$ が得られた．
2. **太陽風**．太陽中の重水素は太陽が主系列星になる以前に He^3 に変化しているので，太陽風と隕石に含まれる He^3 の測定により，太陽ができる以前の He^3 と重水素の存在量の和が求められると考えられていた．この和から他の手法で求めた He^3 の存在量を差し引いて*14，重水素–水素比として $(2.6 \pm 0.6 \pm 1.4) \times 10^{-5}$ が得られた．
3. **木星大気**．木星大気のスペクトル観測より*15，重水素–水素比として $(5 \pm 2) \times 10^{-5}$ が得られた．

より最近になり，非常に早期の銀河間物質中の重水素–水素比を測定できるよ

---

*13 J. L. Linsky *et al.*, *Astrophys. J.*, **402**, 694 (1993); **451**, 335 (1995).

*14 K. A. Olive, *lectures given at the Advanced School on Cosmology and Particle Physics*, Peniscola, and *Theoretical and Observational Cosmology Summer School*, Cargese [astro-ph/9901231]，およびこの論文で引用されている文献も見よ．

*15 H. B. Niemann *et al.*, *Science*, **272**, 846 (1996).

表 3.3 5 つのクエーサーのスペクトル線の観測から得られた重水素と水素の吸収線の波長に対応する銀河間ガス雲の赤方偏移，およびそれらの吸収線の相対強度から推定されたガス雲中の重水素と水素原子の数の比．脚注 17 の文献より抜粋（不定性は標準偏差 1 個分を示す）．

QSO	z	D/H
PKS 1937−1009	3.572	$3.25 \pm 0.3 \times 10^{-5}$
Q1009+299	2.504	$3.98^{+0.59}_{-0.67} \times 10^{-5}$
HS 0105+1619	2.536	$2.54 \pm 0.23 \times 10^{-5}$
Q1243+3047	2.525675	$2.42^{+0.35}_{-0.25} \times 10^{-5}$
Q2206−199	2.0762	$1.65 \pm 0.35 \times 10^{-5}$

うになった．この手法は遠方クエーサーのスペクトルに見られる重水素と水素の吸収線を用いるもので，これらの吸収線は遠方クエーサーの視線方向に存在する高赤方偏移の銀河間ガス雲によるものだ[*16]．2003 年，数年に渡って観測された 4 つのクエーサーのスペクトルに含まれる重水素と水素の吸収線の測定結果，およびもう 1 つのクエーサーからの測定結果が発表された[*17]．その結果を表 3.3 に示す．得られた重水素–水素比の平均値は $2.78^{+0.44}_{-0.38} \times 10^{-5}$ で，これはバリオン–光子比では $\eta = 5.9 \pm 0.5 \times 10^{-10}$，バリオン密度パラメータでは，

$$\Omega_B h^2 = 0.0214 \pm 0.0020$$

に対応する．たとえ H_0 が小さく 50 km/s/Mpc 程度であったとしても，Ω_B の値がすべての非相対論的物質が与える密度と臨界密度の比，すなわち銀河団の研究から得られた値 $\Omega_M \simeq 0.2$，あるいは Ia 型超新星の赤方偏移–距離関係から得られた値 $\Omega_M \simeq 0.3$ と比べてずっと小さいことは明らかである．これらの値の食い違いにより，暗黒物質がバリオンからできているのではない，という最初の証拠が得られたのである．

この食い違いは，宇宙マイクロ波背景放射異方性の測定によってさらにはっきりとした．7.2 節で見るように，宇宙マイクロ波背景放射異方性の測定より

---

*16 初期の観測結果のまとめは，K. A. Olive，脚注 14 を参照; S. Sarker, *talk at the Second International Workshop on Dark Matter in Astro- and Particle Physics*, Heidelberg [astro-ph/9903183] を参照．

*17 D. Kirkman, D. Tytler, N. Suzuki, J. M. O'Meara, D. Lubin, *Astrophys. J. Suppl.*, **149**, 1 (2003) [astro-ph/0302006]，およびこの論文で引用されている文献も見よ．

$\Omega_B h^2 = 0.0223^{+0.0007}_{-0.0009}$，$\Omega_M h^2 = 0.127^{+0.007}_{-0.013}$ が得られ，全物質密度が通常のバリオン物質密度の 5 倍から 6 倍大きいことがわかっている．この残りの物質の性質は 3.4 節で議論する．

重水素の場合と同様に，バリオン–光子比が増加すると He^3 の原始存在量は減少する．銀河系内の HII 領域と惑星状星雲の長期に渡る研究に基づき，2002 年の論文[*18]は星間物質の He^3 と水素の存在量比は $1.1 \pm 0.2 \times 10^{-5}$ より小さいと結論した．これは $\Omega_B h^2 = 0.0214$ に対して計算された値 $1.04 \pm 0.06 \times 10^{-5}$ と矛盾しない．しかし，重水素の場合とは異なり，恒星内では He^3 を生成することも破壊することも可能なため，星間物質から観測された He^3 の存在量が本当に He^3 の原始存在量を反映しているかは疑問である．実際，小質量星は大量の He^3 を星間空間に放出すると考えられてきたため，実のところ，星間物質から観測された存在量と宇宙の元素合成の理論から得られる計算値が一致するというのは矛盾である[*19]．この一見矛盾するように見える現象は，実は小質量星内部には He^3 が効率よく破壊される領域が存在し，そのためこれらの星はあまり He^3 を放出しないことを示した計算結果の登場[*20]により解決されたかもしれない．

Li^6 も宇宙の元素合成から生成されるが，存在量が非常に小さい（水素と比べて 10^{-13} から 10^{-14}）ため，宇宙理論のテストにはあまり有用ではないと考えられてきた[*21]．一方，Li^7 は注目に値する．Li^7 の存在量はバリオン–光子比に複雑な形で依存する．というのは，Li^7 は 2 つの異なる過程を経て生成されるからである．反応 $H^3 + He^4 \to Li^7 + \gamma$ から直接的に生成されるし，反応 $He^3 + He^4 \to Be^7 + \gamma$ が起こったずっと後に，反応 $e^- + Be^7 \to \nu + Li^7$ によって間接的にも生成される．バリオン密度が大きくなると，まず直接的に生成される Li^7 の量が増えるが，さらにバリオン密度が大きくなると反応 $p + Li^7 \to He^4 + He^4$ によって Li^7 が破壊され，存在量が減少する．さらにバリオン密度が大きくなると最終的に間接生成が支配的となり，Li^7 の存在量は再び増加する．Li^7–水素比の最小値は約 2×10^{-10} のあたりで，そのときのバリオン–光子比は約 3×10^{-10}，あるい

---

*18 T. M. Bania, R. T. Rood, D. S. Balser, *Nature*, **415**, 54 (2002).

*19 N. Hata *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3977 (1995); K. A. Olive *et al.*, *Astrophys. J.*, **444**, 680 (1995).

*20 P. P. Eggleton, D. S. P. Dearborn, J. C. Lattanzio, *Science* **314**, 1580 (2006).

*21 このトピックに関するレビューは，E. Vangioni-Flam, M. Cassé, R. Cayrel, J. Audouze, M. Spite, F. Spite, *New Astron.*, **4**, 245 (1999) を見よ．

はバリオン密度パラメータにして $\Omega_B h^2 = 0.01$ だと計算されている．Li^7–水素比の観測値は[22] 2000 年に $2.07^{+0.15}_{-0.04} \times 10^{-10}$ であり，理論的最小値に近い．その後の研究[23]では，銀河系ハロー内にある 63 個の小質量矮星の観測より Li^7–水素比として $(2.37 \pm 0.05) \times 10^{-10}$ が得られている．両者とも $\Omega_B h^2 = 0.0214$ から予言される値 3×10^{-10} より小さい．Li^7 は恒星内や宇宙線と物質の相互作用によって生成されるが，恒星大気の対流によって Li^7 の存在量が減ることも考えられる．球状星団 NGC 6397 内にあり，異なる温度を持つ様々な星の Li^7 存在量の観測結果は，Li^7–水素比が初期値 3×10^{-10}（重水素の存在量とマイクロ波背景放射異方性から得られる $\Omega_B h^2$ を用いて計算した値）を持ち，その後恒星大気の対流によって Li^7 が減少したという理論予測と整合することが報告された[24]．Li^7 はもしかしたら例外である可能性もあるが，それ以外の元素に関しては現在，軽元素存在量の観測と，宇宙マイクロ波背景放射異方性の観測から得られる $\Omega_B h^2$ の値を用いた宇宙の元素合成の計算結果は完全な一致を見ている．

宇宙の元素合成と宇宙マイクロ波背景放射から推定されたバリオン質量密度は全質量密度よりもずっと小さいが，同時にそれは星や光を発する星間物質に見られるバリオン物質密度よりもずっと大きいことがわかっている[25]．この「暗黒バリオン物質」の一部分は電離ガスの形で銀河間空間にあり，また褐色矮星や水素分子運の形で銀河内にもあると考えられている[26]．しかし，これは宇宙論的問題というよりは，天体物理学的問題であろう．

3.3 バリオン数生成とレプトン数生成

3.2 節において，宇宙の元素合成の時刻では核子と光子の数の比 η が非常に小さかった（$\eta \simeq 5 \times 10^{-10}$）のを学んだ．それよりもさらに早期，温度にして 10^{13} K 以上になると核子は 3 つのクオークに分解され，光子とほぼ同数のクオークと反クオークが熱平衡状態で存在していただろうと考えられる．しかし，クオーク

---

*22 T. K. Suzuki, Y. Yoshii, T. C. Beers, *Astrophys. J.*, **540**, 99 (2000) [astro-ph/ 0003164]. より早期の観測は，M. Spite, F. Spite, *Nature* **297**, 483 (1982); S. G. Ryan, J. E. Norris, T. C. Beers, *Astrophys. J.* **523**, 654 (1999) を見よ．

*23 J. Melendez, I. Ramirez, *Astrophys. J.*, **615**, L33 (2004).

*24 A. J. Korn *et al.*, *Nature*, **442**, 657 (2006) [astro-ph/0608201].

*25 M. Fukugita, C. J. Hogan, P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.*, **503**, 518 (1998).

*26 たとえば，M. Roncadelli, Recent Research Devel. *Astron. & Astrophys.*, **1**, 407 (2003) を見よ．

と反クオークが対消滅する間はバリオン数（クオークの数から反クオークの数を引いて 1/3 をかけたもの）が保存することから，対消滅の時刻以前に既に微小なクオークの数の超過があったはずである．つまり，1 個の光子あたり η 程度だけクオークの方が反クオークより多く，そのおかげですべての反クオークがクオークと対消滅した後もいくつかのクオークが残り，核子が構成されたのである．同様に，陽電子の数に対して電子の数にも微小な超過があったはずである（そうでなければ宇宙の全電荷をゼロに保つことができない）．この電子超過を打ち消すように反ニュートリノの数がニュートリノよりもわずかに多く，全レプトン数（電子，ミュー粒子，タウ粒子，ニュートリノの数密度から対応する反粒子の数密度を引いたもの）がゼロになっている可能性も考えられなくはないが，それよりはレプトン–反レプトンが対消滅した時刻以前にクオークの超過分と同程度のレプトン超過があったと考える方が自然に思われる．

クオークと反クオーク，およびレプトンと反レプトンの数におけるこれらの微小な違いは，宇宙が粒子と反粒子が同数存在する状態から出発し，何らかの物理過程によってバリオン数とレプトン数が生成されたとして説明できるかもしれない．もしそうであれば η の値を第一原理から計算でき，なぜ η がそんなに小さいのかを理解できるかもしれない．1967 年，サハロフ*1はそのような説明が可能なために満たされるべき 3 条件を提示した．

1. 当たり前のことだが，粒子と反粒子が同数存在する状態から出発してバリオンを反バリオンより多くしたり，レプトンと反レプトンの数がつりあわないようにするには，何らかの物理過程によってバリオン数あるいはレプトン数の保存が破れていなければならない．

2.（ある運動量とヘリシティ状態を持つ）粒子と反粒子が同数存在する宇宙は対称演算子 C（粒子を反粒子に変える演算子）および CP（粒子を反粒子に変え，さらにすべての 3 次元座標ベクトルの符号を反転する演算子）による変換に対して不変であるが，バリオンが反バリオンより多かったり，レプトンと反レプトンの数がつりあわない状態は明らかに C や CP の変換に対して不変ではない．したがって，そのような状態を作るには何らかの物理過程によって C，CP の変換に対する不変性が破れていなければならない．ただし，C や CP の変換に対する不変性が破れていようがいまいが，あらゆる相対論的量子場の理論は CPT，つまり粒

*1 A. D. Sakharov, *JETP Lett.*, **5**, 24 (1967).

子を反粒子に変え，すべての3次元座標ベクトルの符号を反転し，さらに時間の進む方向を反転する演算子による変換に対して不変である[*2]．時間反転対称性 T は宇宙膨張によって破れているから，CPT の保存はバリオン数やレプトン数の生成と矛盾しない．

3. それほど自明ではないが，粒子と反粒子が同数存在する状態から出発し，バリオンが反バリオンより多かったりレプトンと反レプトンの数がつりあわない状態を生み出すには，宇宙がどこかの時刻において熱平衡（化学平衡も含む）状態から離れなければならない．なぜならば，もし熱平衡状態でバリオン数やレプトン数が保存せず，かつ電荷のような保存量がすべてゼロであれば，化学ポテンシャルは熱平衡状態におけるすべての反応で保存量なのだから，すべての化学ポテンシャルもゼロとならねばならないからだ．たとえ C と CP 対称性が破れていても，CPT 対称性によって粒子と反粒子の質量は同じなので，化学ポテンシャルがゼロならば粒子と反粒子はまったく同じ分布関数（式（3.1.28）で与えられる理想気体の分布関数で $\mu = 0$ としたもの）を持つことになる．したがって，任意の反応率を持ついかなる過程を考えようとも，正味のバリオン数やレプトン数は生成されない[*3]．この推論への例外は本節の最後で述べる．

これら3つの条件はすべて満たされることがわかっている．

1. について　バリオン数が保存しないという直接の実験的証拠はないものの，素粒子標準模型の現在の解釈からいえば，非常に弱いバリオン数保存の破れの可能性はある．現在の解釈では，標準模型は基礎理論ではない．以前は，基礎理論に含まれる相互作用の結合定数は無次元，あるいは質量の正の冪乗で書け，標準模型に現れるすべての無限大はこれらの結合定数に繰り込むことで回避できると考えられていた．しかし現在では，標準模型は有効場の理論[訳注1]であり，ある基礎的な質量スケール M よりもずっと小さいエネルギーでのみ有効だと考えられている．この M はプランク質量 $M_{\mathcal{P}} \equiv G^{-1/2} = 1.22 \times 10^{19}$ GeV かもしれないし，標準模型の（適切に規格化された）3つの独立なゲージ結合パラメータが等しくなるエネルギースケール $\approx 10^{15}$–10^{16} GeV かもしれない．そのような有効場の理

[*2] QTF 第1巻 5.8 節（邦訳『場の量子論 1 巻』5.8 節）を見よ．

[*3] より詳しい議論，およびより早期の仕事については，S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 850 (1978) を見よ．

[訳注1] 低エネルギーでのみ成り立つ近似的な場の理論．

論は強い相互作用，弱い相互作用，そして電磁場の相互作用のゲージ対称性から許されるすべての相互作用を含んでいると考えられている．しかし，ある有限個の結合パラメータを除く他のすべての結合パラメータは質量の負の冪乗の次元を持つ．したがって，これらの「繰り込み不可能」な結合パラメータは，エネルギーが $E \ll M$ の領域では E/M の冪乗で小さく抑えられることになる．標準模型ではゲージ対称性からバリオン数やレプトン数の保存を破る相互作用が抑制されるので，この描像に基づけば，たとえエネルギーが M の物理を記述する基礎理論がバリオン数とレプトン数を保存しなくても，$E \ll M$ の領域では良い近似でバリオン数もレプトン数も保存される．言い換えれば，バリオン数やレプトン数の保存は単なる「偶然の」対称性であり，抑制された相互作用である限りバリオン数やレプトン数の保存を破る相互作用を排除する理由はないのである．この種の相互作用の中で最も抑制が弱いのは 2 つのレプトン 2 重項と 2 つのスカラー 2 重項を含む相互作用で，因子 M^{-1} で抑制される．これはレプトン数保存を破るがバリオン数保存は破らない．次に 3 つのクオーク場と 1 つのレプトン場を含む相互作用があり，因子 M^{-2} で抑制される．これはレプトン数保存もバリオン数保存も破る[*4]（また，以下で見るように，標準模型の電弱相互作用の理論では量子力学的効果によってバリオン数保存とレプトン数保存が破られる）．これら 2 つの相互作用のうち，前者には実験的な兆候があるが，後者にはない．結合パラメータが $1/(10^{16}\ \mathrm{GeV})$ 程度の大きさを持ち，相互作用に含まれる電荷を持たない中性のスカラー場がそれぞれ真空期待値を持ったとすれば，前者の相互作用はニュートリノに $10^{-2}\,\mathrm{eV}$ 程度の大きさの質量を与える．これはニュートリノ振動の実験結果と良く一致する（ニュートリノに質量があれば，慣例的にレプトン数 +1 を与えられているヘリシティ状態 +1/2 のニュートリノを，ローレンツ変換によってレプトン数 −1 を持つヘリシティ状態 −1/2 のニュートリノに移すことができる）．後者の相互作用は $p \to \pi^0 + e^+$ のような崩壊過程につながり，崩壊率は $m_p^5/M^4\hbar$ 程度の大きさで与えられる．そのような崩壊は見つかっていないが，崩壊率が小さいため容易には見つからないのだろう．

2. について　C 対称性の破れは 1957 年に発見され，CP 対称性の破れは 1964 年

---

*4　このトピックに関するレビューおよびもとの文献への引用は，QTF 第 2 巻 21.5 節（邦訳『場の量子論 4 巻』21.5 節）を見よ．

に発見された[*5].

3. について　宇宙膨張によって熱平衡状態が終わるというのは良くある話である．温度が下がることで反応率が下がり，それが宇宙膨張率を下回った時点で熱平衡が終わることもあれば，温度が下がることで水蒸気の凝縮や液体の水の凍結のような1次の相転移が起こり，熱平衡が終わることもある．これ自身はバリオン数やレプトン数の保存を破らないが，バリオン/レプトン数の保存およびC/CPの保存を破る物理過程が正味のバリオン数やレプトン数を生成できる環境を与える．

これらの議論は単に，何かしらの物理過程によってゼロでないバリオン数やレプトン数を生成できる可能性を示しているだけである．残る仕事は，観測されているバリオンと光子の数密度比を説明できる具体的な理論を探すことである[*6]．それにはいくつかの候補がある．

1．重い粒子の遅延崩壊[*7]

「X 粒子」という重い粒子があると仮定し，それが2つの異なる経路を経て崩壊するとしよう．それぞれの経路はバリオン数 B_1，B_2 およびレプトン数 L_1，L_2 を持ち，これらの経路の相対的な崩壊頻度を表す分岐比（branching ratio）はそれぞれ r，$1-r$ とする（たとえば，大統一理論の候補のいくつかには「レプトクオーク」という 10^{15} GeV 程度の大きさの質量を持つ粒子があり，クオーク2個に崩壊してレプトン数はゼロだがバリオン数2/3を持つ経路と，反レプトンと反クオークに崩壊してレプトン数 -1 とバリオン数 $-1/3$ を持つ経路がある）．X の反粒子はそれぞれバリオン数 $-B_1$，$-B_2$ およびレプトン数 $-L_1$，$-L_2$ を持つ経路で崩壊し，分岐比はそれぞれ $\bar{r}$，$1-\bar{r}$ とする（CPT対称性より，ある粒子の**全**崩壊率はその反粒子の全崩壊率と等しくなければならないが，CとCP対称性が破れていれば，崩壊経路によって粒子と反粒子が異なる分岐比を持つこともできる）．すると，1個の X 粒子および1個の反 X 粒子の崩壊によって生成される全バリオン数の平均値は，

---

*5 QTF 第1巻3.3節（邦訳『場の量子論1巻』3.3節）を見よ．

*6 この方向での初期の試みは，M. Yoshimura, *Phys. Rev. Lett.*, **41**, 281 (1978); **42**, 746(E) (1979); S. Dimopoulos, L. Susskind, *Phys. Rev. D*, **18**, 4500 (1979); *Phys. Lett.* **81B**, 416 (1979); A. Yu. Ignatiev, N. V. Krosnikov, V. A. Kuzmin, A. N. Tavkhelidze, *Phys. Lett.*, **76B**, 436 (1978); B. Toussaint, S. B. Treiman, F. Wilczek, A. Zee, *Phys. Rev. D*, **19**, 1036 (1978); J. Ellis, M. K. Gaillard, D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett.*, **80B**, 360 (1979); **82B**, 464(E) (1979) を見よ．

*7 S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 850 (1979).

$$\Delta B = rB_1 + (1-r)B_2 - \bar{r}B_1 - (1-\bar{r})B_2 = (r-\bar{r})(B_1 - B_2) \qquad (3.3.1)$$

で与えられ，同様な式がレプトンにもあてはまる．

同様に，「N 粒子」という重い粒子があり，その反粒子は N 粒子そのものと同一だと仮定しよう．そして，N 粒子は分岐比 r でバリオン数 B_1 とレプトン数 L_1 を持つ経路に崩壊し，分岐比 $1-r$ でバリオン数 $-B_1$ とレプトン数 $-L_1$ を持つ経路に崩壊するとしよう．すると，各崩壊で生成されるバリオン数の平均値は以下で与えられる．

$$\Delta B = rB_1 - (1-r)B_1. \qquad (3.3.2)$$

レプトン数にも同様のことがいえる．もし C と CP 対称性が破れていれば $r \neq 1-r$ を持つことが可能であり，正味のバリオン数とレプトン数を生成できる．たとえば，大統一理論の候補のいくつかは電荷を持たない中性レプトンを含み，それはスカラー粒子とレプトン，およびそれらの反粒子に崩壊する．これらの崩壊経路の分岐比が異なれば正味のレプトン数が生成される．

熱平衡状態ではこれらの過程から正味のバリオン数やレプトン数が生成されることはない．というのは，崩壊によってせっかく生成されたバリオン数やレプトン数が，その逆過程によって破壊されてしまうからである．宇宙の膨張率 H が X 粒子の崩壊率より大きければ熱平衡の条件が満たされなくなるが，$k_{\mathcal{B}}T$ がすべての粒子の質量よりも大きければ，各種反応率がどんな値を取るにせよすべての粒子分布は熱平衡状態の形を取り，温度は膨張に応じて $T \propto 1/a$ のように変化する．より詳しくいえば，もし $H \equiv \dot{a}/a$ が崩壊率 Γ_X よりも低くなった時期に $k_{\mathcal{B}}T$ がすべての粒子の質量よりも大きければ，崩壊の逆過程により，崩壊した分につりあうだけの X 粒子が生成されてしまう．一方，もし $H \approx \Gamma_X$ となった時刻で $k_{\mathcal{B}}T$ が X 粒子の質量 m_X よりも小さければ，ボルツマン分布の因子 $e^{-m_X/k_{\mathcal{B}}T}$ によって崩壊の逆過程が抑制され，X 粒子と反粒子は対消滅し，1 つの粒子–反粒子対から正味のバリオン数 $(r-\bar{r})(B_1 - B_2)$ が生成される．

したがって，バリオン数生成の条件は $H = \Gamma_X$ となる温度で $k_{\mathcal{B}}T \leqq m_X$ が満たされていることである．この時期の H は（$\hbar = c = 1$ の単位系で），

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G a_{\mathcal{B}} T^4 (\mathcal{N}/2)}{3}} = 1.66 (k_{\mathcal{B}}T)^2 \mathcal{N}^{1/2} / m_{\mathcal{P}} \qquad (3.3.3)$$

で与えられる．ここで $m_{\mathcal{P}} \equiv G^{-1/2} = 1.22 \times 10^{19}$ GeV，そして $\mathcal{N}$ は全素粒子とその反粒子のすべてのヘリシティ状態を（フェルミ粒子には7/8をかけて）足し上げた数である（ただし，いま考えている温度では宇宙のエネルギー密度に主に寄与するのは多くの種類 $\mathcal{N}$ の相対論的粒子であって，X 粒子そのものではないと仮定する）．X 粒子の崩壊率は m_X に無次元のパラメータ α_X をかけたもので評価できる．α_X は崩壊を引き起こす相互作用の強さ，および可能な崩壊経路の数を決めるパラメータを表す．これより，崩壊が重要となる温度 T_X が以下のように求められる．

$$k_{\mathcal{B}}T_X \approx \sqrt{\alpha_X m_X m_{\mathcal{P}}/\mathcal{N}^{1/2}}. \tag{3.3.4}$$

これが m_X より小さくなるためには以下の条件が満たされれば良い．

$$m_X \geqq \mathcal{N}^{-1/2}\alpha_X m_{\mathcal{P}}. \tag{3.3.5}$$

これは結構厳しい下限値である．たとえば，もし X 粒子が通常の電弱相互作用によって崩壊するとすれば $\alpha_X \approx 10^{-2}$ であり，$\mathcal{N} \approx 100$ に対して m_X は 10^{16} GeV 以上という結果になる．もっとも，強い相互作用と電弱相互作用を統一する理論の観点から見れば，これはそれほどおかしな値ではない．

この条件が満たされたと仮定すれば，式（3.3.1）から η を簡単に計算できる．温度が X 粒子の質量よりも非常に大きい時期では X 粒子とその反粒子の数密度は光子の数密度と同程度である．この時期のエントロピー密度は（$k_{\mathcal{B}} = 1$ の単位系で）光子の数密度 $\times\mathcal{N}$ 程度の大きさを持つので，X–$\bar{X}$ 対の数密度とエントロピー密度の比は $1/\mathcal{N}$ 程度の大きさを持つ．式（3.3.4）が満たされていれば，これらの粒子–反粒子対が消滅した後のバリオン数とエントロピー密度の比は $(r - \bar{r})(B_1 - B_2)/\mathcal{N}$ 程度の大きさとなる．エントロピー密度は a^{-3} に比例して変化し，**もしバリオン数がその後保存するとするならば**バリオン数も同様に a^{-3} に比例して変化するので，バリオン数とエントロピー密度の比は時間に関して一定に保たれる．現在のエントロピー密度は光子の数密度と同程度で，現在の宇宙ではバリオンは核子のみ（反核子は存在しない）だから，核子と光子の数密度の比は以下の値を取ると期待できる．

$$\eta \approx (r - \bar{r})(B_1 - B_2)/\mathcal{N}. \tag{3.3.6}$$

$B_1 - B_2$ はたいていの場合1程度の大きさを持つ（上記のレプトクオークの例で

は正確に 1 である）が，$r-\bar{r}$ は一般に非常に小さい．というのは，CP 対称性の破れは弱く，さらに CPT 定理から摂動論の最低次では $r=\bar{r}$ が成り立つからである．$r-\bar{r}$ の正確な値はモデルによって異なるが，欲しい η の値 5×10^{-10} はとても自然に得られるようである[*8]．しかし，この考えはインフレーション理論の枠組みでは困難となる．10 章で見るように，インフレーション後の温度は式 (3.3.5) を満たすような大質量粒子を生成できるほどは高くないからである．

2. 電弱相互作用の非摂動論的効果によるバリオン数とレプトン数の非保存

弱い相互作用，電磁相互作用，そして強い相互作用の標準模型では，バリオン数とレプトン数は摂動論のすべての次数で自動的に保存される．しかし，ある非摂動論的効果を考慮に入れるとバリオン数もレプトン数も保存しなくなる[*9]．この効果によってバリオン数とレプトン数の保存を破る反応が生まれるが，そのような反応は低エネルギーでは因子 $\exp(-8\pi^2/g^2)\simeq10^{-162}$ によって強く抑制される（g は $SU(2)$ 電弱理論の結合定数）．この微小な数は，あるトポロジーを持つゲージ場の配位が異なるトポロジーを持つ配位に遷移する際，この配位間のポテンシャル障壁を量子力学的トンネル効果で通り抜ける確率が極めて小さいことを意味する．しかし，300 GeV を超える高い温度では熱的なゆらぎによってこのポテンシャル障壁を**飛び越える**ことが可能になり，上記の微小な数による遷移確率の抑制がなくなる[*10]．しかし，これらの反応はそれ自身だけでは十分な量のバリオン数やレプトン数を生成できない．なぜなら，これらの反応はほぼ完全な熱平衡状態で起こり[*11]，かつ CP 対称性の破れとバリオン数，レプトン数保存の破れに関連するパラメータが小さく，反応が抑制されるからである[*12]．

---

*8 D. V. Nanopoulos, S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **20**, 2484 (1979).

*9 G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 8 (1976). QTF 第 2 巻 23.5 節（邦訳『場の量子論 4 巻』23.5 節）も見よ．

*10 V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.*, **155B**, 36 (1985). 異なる配位間の遷移は主に「スファレロン」として知られる中間的配位を通して起こる．N. S. Manton, *Phys. Rev. D*, **28**, 2019 (1983); F. R. Klinkhamer, N. S. Manton, *Phys. Rev. D*, **30**, 2212 (1984); R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, *Phys. Rev. D*, **10**, 4138 (1974) を見よ．

*11 電弱理論では 1 次の相転移は起こらないことが以下の文献で示されている．K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, M. Shaposhnikov, *Nucl. Phys. B*, **466**, 189 (1996); K. Rummukainen, M. Tsypin, K. Kajantie, M. Shaposhnikov, *Nucl. Phys. B*, **532** (1998); F. Csikor, Z. Fodor, J. Heitger, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 21 (1999). より早期の仕事への引用はこれらの文献中に含まれている．

*12 M. E. Shaposhnikov, *JETP Lett.*, **44**, 465 (1986); *Nucl. Phys. B* **287**, 757 (1987).

3. レプトン数生成[*13]

2. で述べた電弱相互作用の非摂動論的効果は，それ自身だけでは観測されているバリオン–光子比の値を説明できないが，すでに存在するレプトン数をバリオン数に変えたり，バリオン数をレプトン数に変えたりすることはできる．$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 標準模型において，唯一完全に保存される量子数はゲージ対称性に関連するもの——弱アイソスピンの生成子 T_3，弱超電荷 Y（本書では e を単位として電荷が $T_3 - Y$ となるように Y を定義する），量子色力学のゲージ群 $SU(3)$ の生成子——そして，全バリオン数から全レプトン数を差し引いた量 $B-L$ である．$B-L$ が保存するのは，クオークやレプトンのループを含むファインマン・ダイアグラムが B と L の差を取ることで相殺するためである．実はこのため，レプトクオークがクオーク 2 個に崩壊，あるいは反レプトン 1 個と反クオーク 1 個に崩壊することで宇宙のバリオン数を生成するというアイデアが困難なものとなってしまう．これらの崩壊経路はそれぞれ異なる値の B と L を持つが，両者とも同じ値（2/3）の $B-L$ を持つ．ゆえに，もし宇宙が粒子と反粒子が同数存在する状態で始まったならば，レプトクオークと反レプトクオークの崩壊によって等しい数のバリオン数とレプトン数が生成されたとしても真の保存量はすべてゼロのままであり，(以下で示すように) 低エネルギーで熱平衡状態となった際にすべての化学ポテンシャルがゼロとなる．そのような状態は同数の粒子と反粒子を持ち，したがって B，L，$B-L$ はすべてゼロとなる．

一方，もし（上で述べた N 粒子のような）何らかの重い粒子が宇宙初期で崩壊してゼロでない $B-L$ を生成したとすれば，$B-L$ の値は熱平衡の期間中も変わらない（ただし B と L の相対的な値は変わっても良い）．一般に，重い粒子の崩壊でバリオン数やレプトン数がどれほど生成されようとも，あるいは**たとえレプトン数だけが生成されたとしても**，その後熱平衡状態を経ることでバリオンとレプトンの数密度は同程度になると期待できる．

この議論はより定量的にできる[*14]．熱平衡状態で，T_3，Y，$B-L$ のような保存する量子数 Q_a があるとする．また，クオークやレプトンといった粒子が何種類か存在し，それぞれの種類 i の粒子が量子数 Q_a の値として q_{ai} を持つとしよ

---

*13 M. Fukugita, T. Yanagida, *Phys. Lett. B*, **174**, 45 (1986). このトピックに関するレビューは，W. Buchmüller, R. D. Peccei, T. Yanagida, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **55**, 311 (2005) [hep-ph/0502169] を見よ．

*14 J. A. Harvey, M. S. Turner, *Phys. Rev. D*, **42**, 3344 (1990).

う．これらの粒子の化学ポテンシャル μ_i は熱平衡状態におけるすべての反応で保存されるから，μ_i は保存される量子数の線形結合で書ける．

$$\mu_i = \sum_a q_{ai}\mu_a, \tag{3.3.7}$$

ここで係数 μ_a は各保存量子数が持つ化学ポテンシャルと解釈できる．すると，異なる種類の粒子が持つ数密度は μ_a と温度の関数で書け，異なる種類の保存量子数の密度 n_a も μ_a と温度の関数で書ける．n_a と μ_a は同数個あるから，これらの関係式を逆に解くことで μ_a を n_a と温度の関数として書ける．したがって，Q_a には属さないバリオン数やレプトン数も含めたあらゆる量の数密度を n_a と温度の関数として書けるようになる．

いま興味のある状況，つまり温度が 10^{16} K より高い状態では素粒子の標準模型に含まれるすべての粒子が相対論的であり，それらの質量は無視できる．種類 i の粒子の数密度は，

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3}\int \frac{d^3p}{e^{(p-\mu_i)/k_{\mathcal{B}}T} \mp 1} \\ &= 4\pi g_i \left(\frac{k_{\mathcal{B}}T}{2\pi\hbar}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{e^{x-\mu_i/k_{\mathcal{B}}T} \mp 1} \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

で与えられ，g_i は種類 i の粒子が持ちうるヘリシティ状態（および他の多重度）の数で，分母の符号 $\mp$ はボーズ粒子のときは $-$，フェルミ粒子のときは $+$ を取る．反粒子の数密度 $\bar{n}_i$ は同じ式で与えられるが，μ_i を $-\mu_i$ に置き換える．したがって数密度の差は以下で与えられる．

$$n_i - \bar{n}_i = 8\pi g_i \left(\frac{k_{\mathcal{B}}T}{2\pi\hbar}\right)^3 \sinh\left(\frac{\mu_i}{k_{\mathcal{B}}T}\right) \int_0^\infty \frac{x^2\,e^x\,dx}{e^{2x} \mp 2\,e^x\,\cosh(\mu_i/k_{\mathcal{B}}T) + 1}. \tag{3.3.9}$$

いま興味のある状況では全種類の粒子と反粒子の数密度の差が小さいので，すべての粒子に対して $|\mu_i| \ll k_{\mathcal{B}}T$ としてよく，以下の式が得られる．

$$n_i - \bar{n}_i = 8\pi g_i \left(\frac{k_{\mathcal{B}}T}{2\pi\hbar}\right)^3 \frac{\mu_i}{k_{\mathcal{B}}T} \int_0^\infty \frac{x^2\,e^x\,dx}{(e^x \mp 1)^2}. \tag{3.3.10}$$

x に渡る積分の値はボーズ粒子の場合 $\pi^2/3$，フェルミ粒子の場合 $\pi^2/6$ であるから，

$$n_i - \bar{n}_i = f(T)\,\tilde{g}_i\,\mu_i \tag{3.3.11}$$

と書ける．$f(T)$ は，

$$f(T) \equiv \frac{4\pi^3}{3} \frac{(k_{\mathcal{B}}T)^2}{(2\pi\hbar)^3} \tag{3.3.12}$$

で定義する．$\tilde{g}_i$ は粒子 i のスピン状態の数だが，ボーズ粒子に対しては 2 をかける．式（3.3.7）を用いれば式（3.3.11）は，

$$n_i - \bar{n}_i = f(T)\, \tilde{g}_i \sum_a q_{ai}\mu_a \tag{3.3.13}$$

となる．特に，保存量子数 Q_a の密度は，

$$n_a = \sum_i q_{ai}\Big(n_i - \bar{n}_i\Big) = f(T) \sum_b M_{ab}\, \mu_b \tag{3.3.14}$$

で与えられ，行列 M は以下で与えられる．

$$M_{ab} \equiv \sum_i \tilde{g}_i\, q_{ai}\, q_{bi}. \tag{3.3.15}$$

この行列は（あらゆる実数 ξ_a に対し，すべての ξ_a がゼロでない限り $\sum_{ab} M_{ab}\xi_a\xi_b > 0$ が成り立つという意味で）正定値なので逆行列 M^{-1} を持ち，式（3.3.14）から $\mu_a = \sum_b M^{-1}_{ab} n_b / f(T)$ を得る．これを式（3.3.13）に代入すれば，あらゆる種類 i の粒子，反粒子に対して，

$$n_i - \bar{n}_i = \sum_{ab} \tilde{g}_i\, q_{ai}\, M^{-1}_{ab}\, n_b \tag{3.3.16}$$

を得る．特に，上で述べたように，すべての保存量子数の密度 n_b がゼロならば全種類の粒子に対して粒子と反粒子が同数存在することに留意しよう．

$B-L$ のような保存量の密度がゼロでない場合を扱うため，行列 M_{ab} を計算しよう．素粒子の標準模型に含まれる粒子を表 3.4（196 ページ）に与える．世代数が N_g のクオークとレプトン，および N_d 個のスカラー 2 重項がある場合，M_{ab} の独立要素は以下で与えられる．

$$M_{B-L\; B-L} = \frac{13\, N_g}{3}, \quad M_{B-L\; Y} = -\frac{8\, N_g}{3}, \quad M_{Y\; Y} = \frac{10\, N_g}{3} + N_d. \tag{3.3.17}$$

T_3 を含む行列要素を計算する必要はない．というのは，同じ $B-L$ や Y の値を持つすべての粒子の T_3 の値の総和はゼロなので，$M_{B-L\; T_3} = M_{Y\; T_3} = 0$ とな

表 3.4　素粒子の標準模型に含まれる粒子のヘリシティおよび色状態の数 $\tilde{g}$（ボーズ粒子には 2 をかける），バリオン数 B, レプトン数 L, およびゲージ量子数 T_3, Y を示す．単一「世代」のクオークとレプトン，およびスカラー場の 1 つの 2 重項のみを示す．下付きの添字 L, R はクオーク u, d, およびレプトン ν, e のヘリシティ状態を表す．反粒子は別にして表に含めなかった．光子と Z^0 はそれ自身が反粒子でもあるから量子数の密度に寄与せず，この表には含めない．色量子数は本文で述べる理由のため，この表には含めない．

粒子	$\tilde{g}$	B	L	T_3	Y
u_L	3	1/3	0	1/2	−1/6
d_L	3	1/3	0	−1/2	−1/6
u_R	3	1/3	0	0	−2/3
d_R	3	1/3	0	0	1/3
ν_L	1	0	1	1/2	1/2
e_L	1	0	1	−1/2	1/2
e_R	1	0	1	0	1
W^+	4	0	0	1	0
φ^+	2	0	0	1/2	−1/2
φ^0	2	0	0	−1/2	−1/2
グルーオン	4	0	0	0	0

る．つまり M_{ab} は 2×2 のブロック対角行列であり，添字 a, b は $B-L$ と Y を示す．したがって $M_{T_3\,T_3}$ を計算することなしに逆行列を求めることができ，

$$M^{-1}_{B-L\;B-L}=\frac{10\,N_g}{3D}+\frac{N_d}{D},\quad M^{-1}_{B-L\;Y}=\frac{8\,N_g}{3D},\quad M^{-1}_{Y\;Y}=\frac{13\,N_g}{3D} \tag{3.3.18}$$

を得る．D は以下で与えられる行列式である．

$$D=\frac{22N_g^2}{3}+\frac{13N_gN_d}{3}. \tag{3.3.19}$$

（同様に，同じ $B-L$ や Y の値を持つすべての粒子の色量子数の総和もゼロなので，色量子数を考慮する必要はない．）これより，もし数密度がゼロでない保存量子数が $B-L$ だけならば，式（3.3.16）と式（3.3.18）より熱平衡状態におけるバリオン数密度が，

$$n_B\equiv\sum_i B_i(n_i-\overline{n}_i)=\sum_i\tilde{g}_iB_i\Big((B-L)_iM^{-1}_{B-L\;B-L}+Y_iM^{-1}_{Y\;B-L}\Big)n_{B-L}$$

$$= \left(\frac{4}{3}M^{-1}_{B-L\ B-L} - \frac{2}{3}M^{-1}_{Y\ B-L}\right) N_g\, n_{B-L}$$

$$= \left(\frac{8\,N_g + 4\,N_d}{22\,N_g + 13\,N_d}\right) n_{B-L} \tag{3.3.20}$$

と導かれる．たとえば，実験的に許される可能性のうち最も単純なものである $N_g = 3$，$N_d = 1$ の場合には $n_B = (28/79)n_{B-L}$ を得る．上で述べたように，n_B は n_{B-L} と同程度の大きさである．このシナリオではCP対称性を破る重い粒子の非平衡崩壊過程によって $B-L$ が生成されるが，n_B/n_γ が小さな値を取る理由をたどればCP対称性の破れが小さいことに行き着く．

4．アフレック–ダイン機構*15

ゼロでないバリオン数を持つスカラー場の非平衡動力学により，バリオン数の非保存が起こる可能性がある．そのためにはスカラー場のラグランジアンでバリオン数保存とCP対称性の両方が破れている必要がある．そのような理論は超対称性理論に動機づけられているが，本書の範囲を超えるためこれ以上は述べないことにする．

5．平衡状態におけるバリオン数生成

宇宙膨張によってCPT対称性が破れ，系を記述するハミルトニアンの中でCとCPの変換に対して奇である項があれば，種類 i のバリオンを記述する状態がゼロでない期待値 ΔE_i を持つことができるようになる．このとき，対応する反バリオンを記述する状態は符号が逆の期待値 $-\Delta E_i$ を持つ．そのような場合には，宇宙がバリオン数ゼロの状態から始まったとしても，宇宙が熱平衡状態になった際バリオン数保存を破る反応が素早く生じていていれば，バリオン数に付随する化学ポテンシャルがゼロであるにも関わらずバリオンと反バリオンのエネルギー差から正味のバリオン数が生成される．バリオン数保存を破る反応が効率良く起こらなくなれば，生成されたバリオン数はそのまま生き残り，数密度は単純に a^{-3} に比例して減少する．バリオン数を保存する衝突が十分に起これば粒子の分布関数は熱平衡状態の形となり，ゼロでない化学ポテンシャルが現れる．

この種の理論の一般論として，膨張宇宙において以下の形を持つ項がラグランジアン密度にあるとしよう．

$$\Delta\mathcal{L}(x) = -\sqrt{-\mathrm{Det}g}\, V_\mu(x)\, J^\mu_B(x), \tag{3.3.21}$$

*15 L. Affleck, M. Dine, *Nucl. Phys. B*, **249**, 361 (1985); M. Dine, L. Randall, S. Thomas, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 398 (1995); *Nucl. Phys. B*, **458**, 291 (1996).

ここで $V_\mu(x)$ は（量子的でないという意味で）古典的なベクトル場，$J^\mu_B(x)$ はバリオン数に付随するカレントとする（$J^0_B(x)$ はバリオン密度で，C と CP 変換に対して奇である）．この種の提案としてはこれまでのところ 2 つある．1 つ目はベクトル場が $V_\mu = M^{-1}\partial_\mu\varphi$ で，φ は何かのスカラー場[*16]，M は何らかの質量で大きな値を持つ．2 つ目はベクトル場が $V_\mu = M^{-2}\partial_\mu R$ で，R は曲率スカラー[*17]，M は再び何らかの質量で大きな値を持つ．どちらにせよ，ロバートソン–ウォーカー計量の等方性と一様性から V_i はゼロで，V_0 は時間のみの関数であることが要請される．この相互作用により，バリオン数 b_i を持つ種類 i の粒子の 1 粒子状態のエネルギーが $\Delta E_i = V_0(t)\, b_i$ だけずれる．(化学平衡を含む）熱平衡状態ではバリオン数密度は，

$$n_B(t) = \sum_i b_i g_i \int \frac{4\pi p^2\, dp}{(2\pi\hbar)^3}\left[e^{\left(\sqrt{p^2+m_i^2}+b_i V_0(t)\right)/k_{\mathcal{B}}T(t)} \mp 1\right]^{-1} \tag{3.3.22}$$

で与えられ，i に渡る和はすべての粒子（および反粒子）の種類に渡って行われる．g_i と b_i はそれぞれ種類 i の粒子のスピン状態数とバリオン数，正負の符号はそれぞれフェルミ粒子（正），ボーズ粒子（負）を表す．もし時刻 t_1 においてバリオン数保存を破る反応が突然終わったとすれば，その後のバリオン数密度は以下の式で与えられる．

$$n_B(t) = \left(\frac{a(t_1)}{a(t)}\right)^3 \sum_i b_i g_i \int \frac{4\pi p^2\, dp}{(2\pi\hbar)^3}\left[e^{\left(\sqrt{p^2+m_i^2}+b_i V_0(t_1)\right)/k_{\mathcal{B}}T(t_1)} \mp 1\right]^{-1}. \tag{3.3.23}$$

もちろん，$V_0 = 0$ であればバリオンと反バリオンの寄与が相殺し，n_B はゼロとなる．バリオン–光子比は小さいことがわかっているから $V_0(t_1)$ も小さいことが期待され，上の式を $V_0(t_1)$ の 1 次まで展開することで $t > t_1$ におけるバリオン数密度は以下のように与えられる．

$$n_B(t) = -\left(\frac{a(t_1)}{a(t)}\right)^3 \frac{V_0(t_1)}{k_{\mathcal{B}}T(t_1)} \sum_i b_i^2 g_i$$

[*16] A. G. Cohen, D. B. Kaplan, *Phys. Lett. B*, **199**, 251 (1987). この機構に基づくバリオン数生成はスカラー場が素早く振動すると抑制される．A. Dolgov, K. Freese, R. Rangarajan, M. Srednicki, *Phys. Rev. D*, **56**, 6155 (1997) [hep-ph/9610405] を見よ．

[*17] H. Davoudiasl, R. Kitano, G. D. Kribs, H. Murayama, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 201301 (2004).

$$\times \int \frac{4\pi p^2\, dp}{(2\pi\hbar)^3} e^{\sqrt{p^2+m_i^2}/k_B T(t_1)} \left[e^{\sqrt{p^2+m_i^2}/k_B T(t_1)} \mp 1 \right]^{-2}. \tag{3.3.24}$$

同様な機構がレプトン数生成にも一役買っているかもしれない.

あるバリオン数生成理論が妥当かどうかを判断する際に重要となるのは，その理論が現在のバリオン–光子比をうまく予言できるかどうかである．しかし今までのところ，ここで議論した提案のいずれもがこの目標からはほど遠いところにある.

3.4 冷たい暗黒物質

3.2 節で述べたように，宇宙の元素合成を考えると，宇宙の質量のほとんどを占める物質は通常のバリオン物質，すなわち原子核などでは**ない**という結論に達する．7 章ではこの結論が宇宙マイクロ波背景放射異方性の観測によってさらに確かなものになることを学ぶ．したがって，我々は以下の疑問に行き当たる．宇宙の質量のほとんどを占める粒子がバリオンでないとするなら，一体何だというのだ?

この物質は**暗黒**である．つまり，放射と相互作用を行わない．そう考える理由の 1 つはもちろんこの物質が見えないからであるが，もっと言えば，この物質はバリオン物質のように放射との相互作用によって運動エネルギーを失い，銀河円盤に降り注いだりしない．それはすなわちこれらの暗黒粒子が電気的に中性でなければならないことを意味する[*1]．銀河団の動力学に関する詳細な研究により，暗黒物質の粒子は**冷たく**なければならないこともわかっている．冷たいというのは，粒子の速度が非常に非相対論的だということを意味する[*2].

衝突銀河団 1E0657−558（赤方偏移 $z = 0.296$ にあり,「弾丸銀河団」という名で知られる）の研究により，通常のバリオン物質，あるいはそれ自身とも重力以外の相互作用をしない暗黒物質の存在に関する明確な証拠が得られた[*3]．この銀

[*1] ビッグバンの名残りとして現在まで残っているかもしれない，安定な荷電粒子の数密度には特に強い制限がついている．この制限は，物質サンプルに含まれる荷電粒子を，質量と電荷の比に応じて分離・解析する質量分析法と呼ばれる手法を用いて得られたものである．電気的に荷電した未知の粒子と既知の原子核の数の比は，質量が 6 GeV から 330 GeV の範囲にあるかもしれないものに対しては 10^{-21} 以下という制限がつけられている．文献は，P. F. Smith, J. R. J. Bennett, *Nucl. Phys. B*, **149**, 525 (1979).

[*2] P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.*, **263**, L1 (1983); G. R. Blumenthal, S. M. Faber, J. R. Primack, M. J. Rees, *Nature*, **311**, 517 (1984).

[*3] D. Clowe *et al.*, *Astrophys. J.*, **648**, L109 (2006) [astro-ph/0608407].

河団に属するメンバー銀河のほとんどは2つのはっきりしたかたまりに分かれて分布しているが，(X 線放射を通じて観測された）高温ガスはこれら2つのかたまりの間に集中している．このような銀河とガスの分布は，2つの銀河団が衝突した結果だと解釈されている．衝突の際，接近遭遇の確率が低い銀河はほとんどそのまま通り過ぎるが，高温ガスは衝突し，銀河団の中心付近にとどまる．さらに，銀河団の及ぼす重力によって背景にある遠方銀河の光が曲げられる効果を用い，1E0657−558 の物質分布が測定された（この「重力レンズ効果」については9章で議論する）．その結果，1E0657−558 の物質のほとんどは高温ガスの場所に存在せず，銀河の分布のように2つのかたまりを形成していることがわかった．すなわち，物質のほとんどは相互作用せずにお互いをすり抜けてしまったことになる．高温ガスの質量と全物質の質量の比は約 1/6 で，重水素存在量，光度距離と赤方偏移の関係，および宇宙マイクロ波背景放射の観測から得られた Ω_B/Ω_M の値と合致している．

素粒子論は，冷たい暗黒物質を作っている粒子に対していくつかの候補を提供する．

弱い相互作用をする重い粒子（WIMPs）

ある重い粒子が，保存する（電荷などの）加算的量子数，あるいは（パリティなどの）積算的量子数を持っていれば，そのような粒子は現在まで生き残ることができるかもしれない．量子数に付随する化学ポテンシャルがゼロでなければ，すべての反粒子（あるいは粒子）が対消滅した後でもいくらかの粒子（あるいは反粒子）が必ず残る．もし化学ポテンシャルがゼロで初期の粒子と反粒子の数密度が等しくても，宇宙膨張によって数密度が下がり，衝突率が十分小さくなると対消滅反応は止まる．粒子が対消滅できる相手が自身の反粒子だけだった場合には，この時点で対消滅に伴う急激な数密度の減少も止まる[*4]．これらの粒子を（「残り物（left-over)」という意味で）L 粒子と呼ぶことにしよう．また，L 粒子が対消滅する際に生じる他の粒子はすべて近似的に熱平衡および化学平衡状態にあると仮定する．L 粒子とその反粒子の粒子1個あたりの対消滅率は $n\langle\sigma v\rangle$ で与えられる．ここで n は数密度，$\langle\sigma v\rangle$ は対消滅の反応断面積と相対速度の積の平均値を表す．共動体積中の L 粒子の数は $n\,a^3 \times n\langle\sigma v\rangle$ で与えられる率で減少する．

---

*4　B. W. Lee, S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **39**, 165 (1977); D. D. Dicus, E. W. Kolb, V. L. Teplitz, *Phys. Rev. Lett.*, **39**, 168 (1977); E. W. Kolb, K. A. Olive, *Phys. Rev. D*, **33**, 1202 (1986).

対消滅で粒子–反粒子対が減少する一方，熱的な生成によって粒子–反粒子対は増加するが，その生成率は n に依存しない．平衡状態ではこれらの生成・消滅過程はつりあわねばならないから，一般に共動体積 a^3 あたりの生成率は $n_{\rm eq}^2 a^3 \langle \sigma v \rangle$ で与えられる．ここで $n_{\rm eq}$ は平衡状態における L 粒子，および反粒子が持つ数密度を表す．したがって，共動体積 a^3 あたりの L 粒子，および反粒子の持つ数密度の変化は以下のボルツマン方程式で記述される．

$$\frac{d(na^3)}{dt} = -\Big(n^2 - n_{\rm eq}^2\Big) a^3 \langle \sigma v \rangle. \tag{3.4.1}$$

$k_{\mathcal{B}} T \gg m_L$ を持つ非常に高温な状態では L 粒子は相対論的であるから，その平衡時の数密度は T^3 に比例し，T は $1/a$ に比例して変化する．よって式（3.4.1）の解は $n = n_{\rm eq}$ である．宇宙の温度が L 粒子の質量よりも低くなって平衡時の数密度が十分に小さくなると，式（3.4.1）の右辺第 2 項が無視できるようになる．このとき以下の方程式を得る．

$$\frac{d(na^3)}{dt} = -n^2 a^3 \langle \sigma v \rangle. \tag{3.4.2}$$

式（3.4.2）の解は，

$$\frac{1}{n(t)a^3(t)} = 積分定数 + \int \frac{\langle \sigma v \rangle dt}{a^3(t)}$$

あるいは，

$$n(t)a^3(t) = \frac{n(t_1)a^3(t_1)}{1 + n(t_1)\, a^3(t_1) \displaystyle\int_{t_1}^{t} \langle \sigma v \rangle \; a^{-3}(t')\, dt'}$$

で，t_1 は式（3.4.1）の右辺第 2 項が時刻 $t' > t_1$ において無視できるように取る．

ここで重要なのは，分母の積分が $t \to \infty$ で収束することである．宇宙のエネルギー密度が相対論的粒子に支配されている間は $a^3(t)$ は $t^{3/2}$ に比例して増加する．後に宇宙が非相対論的物質，あるいは真空のエネルギーに支配されるようになると，$a^3(t)$ はさらに速く増加する．また，もし対消滅が軌道角運動量ゼロの状態で行われるとすると，σv は低エネルギーで一定となる．したがって，その熱平均値 $\langle \sigma v \rangle$ も低温度になると（すなわち時間が十分経過すると）一定値に近づく．軌道角運動量ゼロの対消滅が何らかの選択則で禁止される場合でも，ゼロでない軌道角運動量状態の寄与は温度が低くなると小さくなるから，積分はさらに速く

収束する．積分が収束するので，共動体積 a^3 あたりの粒子数は以下で与えられる有限の値に近づく．

$$n(t)a^3(t) \to \frac{n(t_1)a^3(t_1)}{1+n(t_1)\,a^3(t_1)\int_{t_1}^{\infty}\langle\sigma v\rangle\;a^{-3}(t')\,dt'}. \tag{3.4.3}$$

宇宙のエネルギー密度がまだ相対論的物質に支配されている間に L 粒子とその反粒子の対消滅が起こったと仮定しよう．$a \propto 1/T$ で，時間は式（3.1.14）から以下のように与えられる．

$$dt = -2\sqrt{\frac{3}{16\pi G\mathcal{N}a_{\mathcal{B}}}}\frac{dT}{T^3},$$

もしくは，公式 $a_{\mathcal{B}} = \pi^2 k_{\mathcal{B}}^4/15$（単位系は $\hbar = c = 1$）を用いて，

$$dt = -\sqrt{\frac{45}{4\pi^3 G\mathcal{N}}}m_L^{-2}\frac{dx}{x^3} \tag{3.4.4}$$

とも書ける．ここで $x \equiv k_{\mathcal{B}}T/m_L$ と定義した．これより式（3.4.1）は，

$$\frac{du(x)}{dx} = B\Big[u^2(x) - u_{\rm eq}^2(x)\Big] \tag{3.4.5}$$

と書け，$u(x)$ は無次元関数

$$u \equiv n/(k_{\mathcal{B}}T)^3, \tag{3.4.6}$$

$u_{\rm eq}$ は平衡時の値，そして B は以下で与えられる無次元パラメータを表す．

$$B = \sqrt{\frac{45}{4\pi^3 G\mathcal{N}}}m_L\langle\sigma v\rangle. \tag{3.4.7}$$

以上より，$n/(k_{\mathcal{B}}T)^3$ の値は B，および L 粒子のスピンのみに依存することがわかる．スピンは $u_{\rm eq}(x)$ を計算する際に必要となる．

$$u_{\rm eq}(x) = \frac{2s_L+1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\frac{4\pi y^2\,dy}{\exp\sqrt{x^{-2}+y^2}\pm 1}, \tag{3.4.8}$$

ここで $y \equiv p/k_{\mathcal{B}}T$ で，いつものように分母の $\pm$ はフェルミ粒子が $+1$ でボーズ粒子が -1 である．

たとえば，$k_{\mathcal{B}}T \ll m_L$ のときは L 粒子は非相対論的で，低エネルギー時の対消滅の反応断面積と相対速度の積の平均値は一定値，

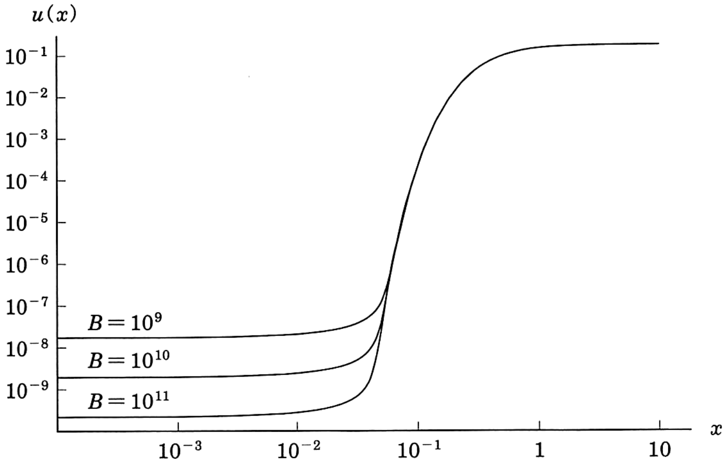


図 3.2 スピンが 1/2 で質量 m_L を持つ暗黒物質粒子の数密度を表す無次元関数 $u(x) \equiv n/(k_{\mathcal{B}}T)^3$．式（3.4.7）で定義されるパラメータ B のいくつかの値に対する計算結果を示す．x 軸は $x \equiv k_{\mathcal{B}}T/m_L$ である．

$$\langle \sigma v \rangle = G_{\rm wk}^2 m_L^2 \mathcal{F}/2\pi \tag{3.4.9}$$

を取る．$G_{\rm wk} = 1.1664 \times 10^{-5}\,{\rm GeV}^{-2}$ は弱い相互作用の結合定数，$\mathcal{F}$ は対消滅を引き起こす相互作用の詳細と可能な対消滅経路の数を表す因子である．これより B は，

$$B = 1.59 \times 10^8 \left(m_L\,[{\rm GeV}]\right)^3 \mathcal{F}\mathcal{N}^{-1/2} \tag{3.4.10}$$

と与えられる．図 3.2 に，$s_L = 1/2$ のときの式（3.4.5）の解を様々な値の B に対して示す．$x > 1$ では $u(x)$ は時間によらず一定で，さらにその値は B によらない．x が減少するとともに $u(x)$ の値も急激に減少するが，$x < 0.01$ では再び一定値に近づく．しかしそのときの $u(x)$ の値は B に依存する．

m_L が GeV くらいの大きさだと B は非常に大きな値を取り，その場合（かつ $s_L = 1/2$）の u の漸近値は以下の値でよく近似できる [*4]．

$$u(0) \simeq 6.1\, B^{-0.95}. \tag{3.4.11}$$

（式（3.4.3）の分母の第 2 項が 1 よりずっと大きければ $u(0) \propto B^{-1}$ が得られる．）

これらの重い粒子とその反粒子の現在の質量密度は（電子–陽電子対消滅によって光子の温度が $(11/4)^{1/3}$ だけ上昇したことを思い出せば），

$$\begin{aligned}\rho_L &= 2m_L u(0)(4/11)(k_{\mathcal{B}}T_{\gamma 0})^3 \\ &= \left(2.15\times 10^{-28}\mathrm{g/cm^3}\right)\left(m_L(\mathrm{GeV})\right)^{-1.85}\left(\mathcal{F}/\sqrt{\mathcal{N}}\right)^{-0.95}, \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

と計算できる．あるいは密度パラメータで書けば以下のような結果を得る．

$$\Omega_L \equiv 8\pi G\rho_L/3\,H_0^2 = 11.5\,h^{-2}\left(m_L(\mathrm{GeV})\right)^{-1.85}\left(\mathcal{F}/\sqrt{\mathcal{N}}\right)^{-0.95}. \tag{3.4.13}$$

Ω_L が m_L の**減少関数**であることに着目しよう．これは，L 粒子が重ければ重いほど効率よく対消滅できるためである．残った L 粒子が宇宙の質量密度のほとんどを占めていると仮定すれば $\Omega_M \simeq \Omega_L$ であり，

$$m_L(\mathcal{F}/\sqrt{\mathcal{N}})^{0.51} \simeq 3.7\,(\Omega_M h^2)^{-0.54}\,\mathrm{GeV}, \tag{3.4.14}$$

つまり $\Omega_M h^2 = 0.15$ に対して m_L は 10 GeV 程度となる．もし L 粒子が宇宙の質量密度の一部しか占めていないならば，この議論は m_L に対する**下限値**を与える．

余談だが，もし宇宙の正味のバリオン数がゼロだとすると，同様な議論が核子と反核子の対消滅にも適用できる．もちろん，この場合 $\langle\sigma v\rangle$ の大きさは $G_{\mathrm{wk}}^2 m_L^2$ で与えられず m_π^{-2} 程度の大きさとなる．$m_L = m_N$，$\mathcal{N} \approx 10$ とし，式（3.4.13）の $\mathcal{F}$ を $2\pi m_\pi^{-2}/G_{\mathrm{wk}}^2 m_N^2 = 2.7\times 10^{12}$ で置き換えれば，式（3.4.13）よりバリオン–反バリオンの密度パラメータとして $\Omega_{B+\bar{B}}h^2 \approx 6\times 10^{-11}$ を得る．これは現在観測されるバリオンの密度パラメータよりはるかに小さいので，我々の周りにあるバリオンが，バリオンと反バリオンが同数ある宇宙で生成され，その後の対消滅過程を生き残り，かつ何かしらの仕組みで反バリオンから隔離されたものだという可能性を棄却できる．

冷たい暗黒物質に戻ろう．もともとは，L 粒子は重いニュートリノではないかと思われていた．3.1 節で学んだように既知の 3 種類のニュートリノの質量は最大でも 1 eV 程度の大きさであるから，それらは暗黒物質ではあり得ない．しかし，非常に重く，かつ既知のレプトンとほとんど混合しない 4 種類目のニュートリノが存在するという可能性は考えられる．Z^0 がこの重いニュートリノと反ニュートリノに崩壊することを防ぐため，重いニュートリノの質量は $m_Z/2 = 45$ GeV より大きくなくてはならない．もしそうでなければ，Z^0 粒子の崩壊率に関する理論と実験の素晴らしい一致を台無しにしてしまう．もし L 粒子が非常に重

いニュートリノであれば，式（3.4.9）の因子 $\mathcal{F}$ は L 粒子の対消滅で生成される粒子の種類数程度の大きさとなる．非常に大雑把にいって $\mathcal{F} \approx \mathcal{N} \approx 100$ とすれば，式（3.4.13）より $\Omega_L h^2 \leqq 10^{-3}$ が得られる．したがって，新しい種類の重いニュートリノも冷たい暗黒物質を説明できそうにない．

L 粒子の候補の中で最も有望視されているのは，超対称性理論に含まれる新しい粒子である[*5]．多くの超対称性理論では，R と呼ばれる保存する積算的量子数が存在する．R は標準模型に含まれるすべての既知の粒子に対しては $+1$ を取り，その超対称性パートナーに対しては -1 を取る（積算的な保存とは，ある反応の終状態にある粒子すべての R の**積**の値が始状態の値と同じであることを意味する）．この保存則より，$R = -1$ を持つ最も軽い粒子（「最も軽い超対称性粒子（Lightest Supersymmetric Particle）」という意味で，よく LSP と呼ばれる）は**安定**である．ただし，これらの粒子 2 つを対消滅させて $R = +1$ を持つ通常の粒子を生成することはできる．どの粒子が $R = -1$ を持つ最も軽い粒子であるかを見極めるには，超対称性の破れに関する 2 つの描像を区別する必要がある[*6]．その両方の描像において，超対称性はある大きな質量 M_S を持つ粒子が存在する影の世界（hidden sector）で，非摂動論的効果によって自発的に破れる．これらの粒子は，標準模型に含まれる既知の粒子やその超対称性パートナーが感じることのない，ある種の強い力を通して相互作用する．また，影の世界における超対称性の破れにより，グラビティーノ（グラビトン（重力子）の超対称性パートナーでスピン 3/2 を持つ粒子）は質量 $m_g \approx \sqrt{G} M_S^2$ を獲得する．

超対称性の破れの 1 つの描像では，破れは電弱相互作用，および通常の強い相互作用を通して標準模型の粒子とその超対称性パートナーに伝達される．この場合の M_S は 100 GeV から 100 TeV 程度の大きさで，グラビティーノの質量は最大でも 1 eV 程度となる．$R = -1$ を持つ最も軽い粒子はグラビティーノとなるが，これでは軽過ぎて冷たい暗黒物質として宇宙の質量密度を説明することはできない．グラビティーノがかつて他の粒子と平衡状態にあり，その後対消滅も崩壊もしなかったとすると，3.1 節で与えた議論からグラビティーノの数密度は光子の数密度よりもおよそ $2/\mathcal{N}$ 倍だけ小さくなる（$\mathcal{N}$ はグラビティーノが熱平衡を離れた時刻での相対論的粒子の実効的状態数）．典型的なエネルギー $k_{\mathcal{B}} T_{\gamma 0}$ を

[*5] ここで述べる可能性，およびその他の可能性は以下の包括的なレビューで議論されている．G. Bertone, D. Hooper, J. Silk, *Phys. Rep.*, **405**, 279 (2005) [hep-ph/0404175].

[*6] QTF 第 3 巻 28.3 節（邦訳『場の量子論 5 巻』28.3 節）を見よ．

持つ光子のエネルギー密度パラメータは式（2.1.8）から $\Omega_\gamma h^2 = 2.47 \times 10^{-5}$ と得られる．したがって，グラビティーノで質量密度パラメータ $\Omega_M h^2 \simeq 0.15$ を説明しようとすれば，グラビティーノの質量はおよそ $0.15\,\mathcal{N}\,k_\mathcal{B} T_{\gamma 0}/2\Omega_\gamma h^2$ となり，$\mathcal{N} \approx 100$ に対してはおよそ 70 eV となる[*7]．よって，超対称性の破れがこの描像に従うならば冷たい暗黒物質はグラビティーノではないことになるが，この可能性は完全に棄却されたわけではない．また，$R = -1$ を持ち，グラビティーノの次に軽い粒子は，おそらく数 10 億年の時間スケールですべてグラビティーノや通常の粒子に崩壊してしまうだろうから，これらも冷たい暗黒物質を説明することはできないだろう（ヘリシティ $\pm 3/2$ を持つ相対論的グラビティーノへの崩壊率は因子 G で抑制されるが，$R = -1$ を持つ粒子がヘリシティ $\pm 1/2$ を持つグラビティーノに崩壊する場合の崩壊率はたかだか因子 M_S^{-2} と標準模型のゲージ結合パラメータの冪乗でしか抑制されない）．

もう 1 つの描像では，超対称性の破れは重力場とその超対称性パートナーで伝達される．これらの相互作用は非常に弱いため，その分 M_S は大きくなり，10^{11} から 10^{13} GeV 程度の大きさとなる．この場合のグラビティーノの質量は標準模型に含まれる既知の粒子の超対称性パートナーの質量と同程度の大きさとなるから，グラビティーノは $R = -1$ を持つ粒子中で最も軽い粒子となる場合もあるし，そうでない場合もある．

もし $R = -1$ を持つ最も軽い粒子がグラビティーノでなければ，スニュートリノ（ニュートリノの超対称性パートナーでスピンは 0）もしくはニュートラリーノ（標準模型に含まれる電荷を持たない中性ゲージボソンとスカラーボソンそれぞれの超対称性パートナーの混合状態で，スピンは 1/2）が最も軽い粒子となり得る[*8]．どちらの場合も，崩壊過程は $R = -1$ と TeV 程度の質量 $\tilde{M}$ を持つ粒子の交換を伴う．ゆえに，これらの粒子の対消滅確率振幅は（2 倍や π などの因子を除けば）$g^2/\tilde{M}^2$ 程度の大きさとなる．g は典型的な電弱相互作用の結合パラメータである．これは弱い相互作用の結合定数 $G_{\rm wk}$ よりも $m_W^2/\tilde{M}^2$ 倍程度小さいので，式（3.4.9）で与えられる対消滅率を決める定数 $\langle \sigma v \rangle$ に含まれる因子 $\mathcal{F}$ は $m_W^4 \mathcal{N}_A/\tilde{M}^4 \approx 10^{-4}\mathcal{N}_A$ 程度の大きさとなる．ここで $\mathcal{N}_A$ は可能な対消滅経路の数である．$\mathcal{N}_A/\sqrt{\mathcal{N}} \approx 1$ と取れば，式（3.4.14）より，$\Omega_M h^2 \simeq 0.15$ を説明す

---

*7 グラビティーノで $\Omega_M \gg 1$ となることを防ぐためにはその質量が約 1 keV よりも軽くなければならないことが，以下の文献で初めて示された．H. Pagels, J. R. Primack, *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 223 (1982).

*8 S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 387 (1983).

るには $R=-1$ を持つ最も軽い粒子の質量が（もしそれがグラビティーノでなければ）1 TeV 程度の大きさとなる必要があることがわかる．これは典型的な超対称性理論模型に見られる標準模型粒子の超対称性パートナーの質量と同程度なので，高エネルギー加速器実験を用いて暗黒物質を作る粒子を生成できるかもしれないという期待を大いに膨らませることとなった．

一方，宇宙論的な考察より，超対称性の破れがこの描像で起こったときには $R=-1$ を持つ最も軽い粒子がグラビティーノではあり得ないことがわかる．標準模型に含まれる粒子の超対称性パートナーとは異なり，グラビティーノの対消滅確率**振幅**は重力相互作用の結合定数 $\sqrt{G}$ の 2 乗に比例するため[*9]，対消滅**率**は G^2 に比例する．この対消滅率は小さ過ぎるため，グラビティーノの数密度を大きく変えることができない．グラビティーノが熱平衡から離れた後，他の粒子が対消滅することで光子の温度が上昇するため，光子の数密度はグラビティーノの数密度よりも大きくなる．例として現在のグラビティーノの数密度が光子の数密度の 1%程度だとしてみよう．すると，上で見たように，グラビティーノの質量密度が現在の質量密度を超えないためにはその質量が 100 eV 程度でなくてはならない．この値は，重力相互作用で超対称性の破れが伝達されるシナリオから期待されるグラビティーノの質量と比べてあまりにも小さ過ぎ，矛盾する．しかし，もしグラビティーノが $R=-1$ を持つ最軽量粒子でなければ，グラビティーノは崩壊してその数密度を下げるから，たとえ個々の質量が非常に大きくても現在の質量密度を許容範囲におさめられるかもしれない[*10]．グラビティーノと他の粒子間に働く相互作用の結合定数は $\sqrt{G}$ に比例するから，静止状態のグラビティーノが持つ崩壊率 Γ_g は，次元解析から Gm_g^3 程度の大きさだと評価できる．これを宇宙の膨張率と比べてみよう．温度 T では膨張率は $\sqrt{G(k_{\mathcal{B}}T)^4}$ となる（この議論では，重力相互作用以外の結合定数や実効的な粒子数などによる 10–100 倍程度の因子は無視する）．グラビティーノが非相対論的となる温度 $k_{\mathcal{B}}T \approx m_g$ まで宇宙が冷えると崩壊率と膨張率の比は $\sqrt{G}m_g = m_g/m_{\text{Planck}} \ll 1$ 程度の大きさとなり，グラビティーノはこの時期以降，つまりグラビティーノが非常に非相対論的な時期に崩壊できるようになる．すでに見たように，グラビティーノの数密度

[*9] グラビティーノの質量 $m_g \approx \sqrt{G}M_S^2$ に含まれる因子 $\sqrt{G}$ は数えない．なぜなら，この因子は超対称性の破れのエネルギースケール M_S とかけあわされるが，M_S は超対称性の破れが重力相互作用で伝達される場合には非常に大きな値となり，グラビティーノの質量が他の超対称性粒子の質量と同程度になるからである．

[*10] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 223 (1982).

は $(k_{\mathcal{B}}T)^3$ 程度の大きさだから，そのエネルギー密度は $m_g(k_{\mathcal{B}}T)^3$ 程度の大きさとなる．これは温度 T で熱平衡状態にある光子や他の相対論的粒子のエネルギー密度 $(k_{\mathcal{B}}T)^4$ よりも大きいから，グラビティーノが宇宙のエネルギー密度を支配し，ひいては宇宙の膨張率を支配することになる．このときの宇宙の膨張率は $\sqrt{Gm_g(k_{\mathcal{B}}T)^3}$ 程度の大きさとなるから，これがグラビティーノの崩壊率 Gm_g^3 と等しくなる時刻，すなわち宇宙の温度が，

$$k_{\mathcal{B}}T_g \approx G^{1/3}m_g^{5/3}$$

の頃にグラビティーノの崩壊が起こるのである．

グラビティーノが崩壊した後，そのエネルギーは光子や他の相対論的粒子に受け渡されねばならないから，崩壊後の宇宙の温度 T'_g は上記の温度 T_g とエネルギー保存の条件 $m_gT_g^3 \approx T_g'^4$ を通して結びつけられ，以下の結果を得る．

$$k_{\mathcal{B}}T'_g \approx G^{1/4}m_g^{3/2}.$$

$k_{\mathcal{B}}T_g \ll m_g$ より，$T'_g \gg T_g$ となることがわかる．もし T_g が宇宙の元素合成が起こる温度 $T_n \simeq 0.1\,\mathrm{MeV}$ よりも低ければ，グラビティーノが元素合成前にもまだ豊富に存在することになり，宇宙のエネルギー密度を上昇させて宇宙膨張を速める．すると，自由な中性子が原子核に捕獲される前にベータ崩壊してその数密度を減らす時間が短くなり，元素合成によってより多くのヘリウムが生成される．また，グラビティーノが元素合成後に崩壊すると，光子とバリオンの数密度の比が急激に増加するから，マイクロ波背景放射の現在の温度から得られる光子とバリオンの数密度比と比べ，元素合成の時刻にはこの比はずっと小さかったことになる．したがって元素合成はより効率よく進み，より多くの中性子がヘリウム生成に使われ，重水素の存在量が大きく減少し，ヘリウムと重元素の存在量に関する現在の理論と観測の一致が台無しになってしまう．この問題は $T_g > 0.1$ MeV であれば回避できるが，もっと弱い条件 $T'_g > 0.4$ MeV が満たされても回避可能である．なぜなら，この場合グラビティーノが崩壊した後の宇宙の温度が十分高くなり，その前に生成されたヘリウムを破壊して，元素合成を 1 からやり直すことができるからである．この条件より $m_g > 10$ TeV が得られ，$m_g \approx \sqrt{G}M_S^2$ よりこれは超対称性の破れのエネルギースケールへの制限 $M_S > 10^{11}$ GeV を与える．

WIMP が原子核と弾性散乱する際に生じる原子核の反跳を利用して，WIMP を検出できる可能性がある[*11]．たとえば，弱い相互作用に含まれる中性カレ

ント相互作用による重いニュートリノの散乱などが考えられる[*12]．この可能性は多くの実験チームによって追求されている．実験チームの名前をいくつか挙げれば，DAMA[*13]，CRESST[*14]，EDELWEISS[*15]，UK Dark Matter[*16]，CDMS[*17]，WARP[*18]などがある．銀河系ハロー内では WIMP がほぼ静止していると仮定すれば，ハロー内の太陽系の運動によって速度 v_w が 220 km/s の WIMP の「風」が生じる．質量 Am_N を持つ原子核が，質量 $m_w \gg Am_N$ を持って速度 v_w で突っ込んで来る WIMP にぶつかると，原子核は v_w 程度の速度で反跳し，$Am_N v_w^2/2 \approx 100\,A$ eV 程度の運動エネルギーを得る．この反跳は，反跳原子核がまわりの原子にぶつかってそれらの原子を電離する効果，反跳原子核が発するシンチレーション光，あるいは反跳によって検出器の結晶格子に生じる振動を観測することで検出できる．恒星の運動の観測から推定される地球近傍の暗黒物質の質量密度 ρ_h は約 0.3 GeV/cm^3 であり，質量 m_w を持つ WIMP の数密度は ρ_h/m_w と推定できる．これより，WIMP の質量と散乱断面積を与えれば弾性散乱率が計算できる．もし原子核の反跳が観測されなければ，m_w 散乱断面積のパラメータ領域の一部が棄却される．

これらの実験における最大のチャレンジは，いかにして WIMP 起源の信号を，自然界に存在する放射線や宇宙線起源の背景雑音と区別するかである．太陽まわりの地球の軌道運動を利用すれば，背景雑音と真の信号を効率よく区別できると期待されている[*19]．この軌道運動により夏の WIMP 風の速度は 15 km/s 速くな

[*11] （208 ページ）現在行われている実験に関するレビューは，Y. Ramachers, *Nucl. Phys. B. Proc. Suppl.* [astro-ph/0211500]; G. Chardin, in *Cryogenic Particle Detection*, ed. C. Ens, Springer (2005) [astro-ph/0411503]; R. J. Gaitskell, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **54**, 315 (2004); J. Ellis, K. Olive, Y. Santoso, V. C. Spanos, *Phys. Rev. D*, **71**, 095007 (2005) [hep-ph/0502001]; K. Freese, *Nucl. Instrum. Meth.*, **A559**, 337 (2006) [astro-ph/0508279]; L. Baudis, *Int. J. Mod. Phys.*, **A21**, 1925 (2006) [astro-ph/0511805] を見よ．

[*12] A. Drukier, L. Stodolsky, *Phys. Rev. D*, **30**, 2295 (1985); M. Goodman, E. Witten, *Phys. Rev. D*, **31**, 3059 (1985).

[*13] R. Bernabei *et al.*, *Phys. Lett.*, **B480**, 23 (2000).

[*14] G. Angloher, *et al.*, *Astropart. Phys.*, **23**, 325 (2005) [astro-ph/0408006].

[*15] V. Sanglard *et al.*, *Phys. Rev. D*, **71**, 122002 (2005) [astro-ph/0503265].

[*16] G. J. Alner *et al.*, *Astropart. Phys.*, **23**, 444 (2005).

[*17] D. S. Akerib *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 211301 (2004) [astro-ph/0405033], [astro-ph/0507190].

[*18] P. Benetti *et al.* [astro-ph/0701286].

[*19] A. K. Drukier, K. Freese, D. N. Spergel, *Phys. Rev. D*, **33**, 3495 (1986); K. Freese, J. A. Frieman, A. Gould, *Phys. Rev. D*, **37**, 3388 (1988).

り，冬には同じ量だけ遅くなる（ただし，詳細は銀河系ハローのモデルによる）から，WIMP 起源の信号は 7%程度の季節変動を伴うと期待される．DAMA 実験のチームはまさにこのような季節変動を検出したと報告したが，この観測結果を説明できる m_w と散乱断面積のパラメータ領域はその後（季節変動に依存しない異なる検出方法を用いた）CDMS 実験チームによって棄却されてしまった．これまでのところ，DAMA を除く様々な実験から得られた散乱断面積の上限値は $m_w > 50$ GeV に対して 10^{-42} から $10^{-43}\mathrm{cm}^2$ である．$m_w < 50$ GeV に対してはもっと弱い上限値しかついていない．ただし，これらの上限値の正確な値は銀河ハロー内の WIMP の分布に関する仮定に依存していることに注意しよう[*20]（超対称性理論に含まれるニュートラリーノの低エネルギー散乱断面積は $10^{-41}\mathrm{cm}^2$ 程度以下であろうと思われている）．

WIMP の数密度が大きい領域で WIMP 粒子が対消滅するとガンマ線や他の高エネルギー粒子を生成する．これらを観測することで WIMP を間接的に検出できる可能性もある[*21]．ガンマ線は地球大気を通過できないので，ガンマ線が大気中で生成する荷電粒子のシャワーを（たとえば荷電粒子が発するチェレンコフ光を用いて）観測するか，気球や人工衛星にガンマ線望遠鏡を搭載し，それらを地球大気圏外に飛ばして観測するしかない．もし一対の WIMP が直接一対のガンマ線に対消滅した場合には，それぞれのガンマ線エネルギーはちょうど WIMP 質量と同じとなり，非常にクリアな WIMP の信号を与える．これまでのところ，そのような単一エネルギーを持つガンマ線の信号は見つかっていない．対消滅がガンマ線に加えて他の粒子を生成したり，あるいは対消滅で生成された粒子が崩壊する過程でガンマ線を放出したりする場合には，ガンマ線のエネルギースペクトルは連続的なものとなる．そのような場合には観測されたガンマ線が WIMP の対消滅起源のものだと同定するのは容易ではないだろう．Cangaroo-II[*22] と HESS[*23] のチームは大気のチェレンコフ光を用いた観測で，銀河系中心付近に連続スペクトルを持つガンマ線光源を発見したと報告した．しかし，これら2つの

---

*20 A. Bottino, F. Donato, N. Fornengo, S. Scopel, *Phys. Rev. D*, **72**, 083521 (2005) [hep-ph/0508270].

*21 レビューは，P. Gondolo, hep-ph/0501134.

*22 K. Tsuchiya *et al.*, *Astrophys. J.*, **606**, L115 (2004) [astro-ph/0403592].

*23 D. Horns, *Phys. Lett. B*, **607**, 225 (2005). F. Aharonian, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 221102 (2006) も見よ．

実験で観測されたスペクトルは互いに大きく異なり，WIMP の対消滅によるガンマ線だと解釈すれば，WIMP の質量としてそれぞれ 1 TeV，19 TeV を与える．

過去数十年に渡り，銀河系中心に単一エネルギーを持つガンマ線放射が観測されている．しかしそのエネルギーはちょうど電子–陽電子対消滅から期待される 511 keV であり，WIMP の対消滅によるものではない．1970 年，気球によるガンマ線観測により，ほぼ銀河系中心の方向から到来する約 500 keV を持つガンマ線の存在が発見された*24．このガンマ線の存在は，その後人工衛星 INTEGRAL（International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory）の観測により，銀河系中心から到来するガンマ線のエネルギーが 511 keV を中心として 3 keV の幅を持つと決定されたことによって揺るぎないものとなった*25．このガンマ線を，比較的軽い WIMP の崩壊によって電子–陽電子対が生成され，その陽電子が周りのガスを電離することでエネルギーを失い，最終的に周りの電子と対消滅する際に放射される 511 keV 線だと説明することも可能である*26．

HEAT 気球実験による宇宙線の観測からは，検出された陽電子の数が通常期待される数よりも多いことが報告されており*27，これも WIMP 対消滅と何か関係があるのかもしれない．ごく最近になり，WMAP 衛星の観測から銀河系中心方向に通常の成分では容易に説明できないマイクロ波の超過があることが報告され，それが WIMP の対消滅によって生成された相対論的な電子や陽電子によるシンクロトロン放射ではないかと議論されている*28, 訳注 1．

しかし，これらの実験結果から，暗黒物質の粒子が WIMP である可能性に対して何かはっきりした結論を導き出すのは時期尚早である．

---

*24 W. N. Johnson, III, F. R. Harnden, Jr., R. C. Haymes, *Astrophys. J.*, **172**, L1 (1972).

*25 P. Jean *et al.*, *Astron. Astrophys.*, **407**, 55 (2003) [astro-ph/0309484]; J. Knödlseder *et al.*, *Astron. Astrophys.*, **411**, 457 (2003) [astro-ph/0309442]; E. Churazov *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **357**, 1377 (2005) [astro-ph/0411351]; J. Knödlseder *et al.*, *Astron. Astrophys.*, **441**, 513 (2005) [astro-ph/0506026]; G. Weidenspointer *et al.*, *Astron. Astrophys.*, **450**, 1013 (2006) [astro-ph/0601673].

*26 C. Boehm, D. Hooper, J. Silk, M. Casse, J. Paul, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 1301 (2004) [astro-ph/0309686].

*27 S. W. Barwick *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 390 (1995); *Astrophys. J.*, **482**, L191 (1997).

*28 D. Hooper, D. P. Finkbeiner, G. Dobler, 0705.3655.

訳注 1 その後の解析で，このマイクロ波の超過は WIMP 起源というよりは天体物理学的な起源ではないかと考えられている．

アクシオンとアクシーノ

アクシオン[*29]は軽くて中性なスピン 0 の粒子である．強い相互作用の非摂動論的効果に CP 不変性を破るものがあるが，この効果が実際に観測されないことを説明するため導入された対称性[*30]はペチェイ–クイン対称性と呼ばれる．その対称性が自発的に破れる際に現れるのがこのアクシオンである[*31]．本書の目的に必要な情報は，アクシオン場 φ を記述する有効作用は，($\hbar = c = 1$ の単位系で) 式 (B.63) の形を取り，ポテンシャルは $V(\varphi) = m_a^2\varphi^2/2$ で与えられるということだけである．

$$I[\varphi] = \int d^4x\sqrt{-\mathrm{Det}g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}m_a^2\varphi^2\right). \tag{3.4.15}$$

アクシオンの質量 m_a は温度の複雑な関数であるが，10^{12} K よりもずっと低い温度では定数となり，その値はペチェイ–クイン対称性が破れるエネルギースケール M と以下の式で関係している．

$$m_{a0} = \frac{F_\pi m_\pi}{M}\frac{\sqrt{m_d m_u}}{m_d + m_u} \simeq \frac{13\ \mathrm{MeV}}{M[\mathrm{GeV}]}. \tag{3.4.16}$$

(ここで $F_\pi = 184$ MeV はパイ中間子の崩壊振幅，m_d と m_u は量子色力学を記述するラグランジアンに現れるダウンクオークとアップクオークの質量で，その比は $m_d/m_u \simeq 1.85$ で与えられる．) もとのペチェイ–クイン模型[*30]では，M は電弱相互作用の対称性の破れのエネルギースケール $M \approx 100$ GeV に取られていたが，その後すぐ，この値は実験的に棄却されていることがわかった．アクシオン場は通常の物質と相互作用する．物質場に $\partial_\mu\varphi/M$ のような因子がかかる形で相互作用するので，$M \geqq 100$ GeV であればアクシオンと物質の相互作用は非常に弱く，アクシオンは原子炉の炉心や恒星内部から減衰することなしに自由に脱出できる．アクシオンの生成率は $1/M^2$ に比例するから，恒星や原子炉からのアクシオン放射の効果が観測されないことから M に対する**下限値**，すなわち m_a に対する上限値が得られる．特に，アクシオン放射による赤色巨星の冷却率の変

---

*29 QTF 第 2 巻 23.6 節（邦訳『場の量子論 4 巻』23.6 節）を見よ．このトピックに関するレビューは，P. Sikivie, in *Axions–Lecture Notes on Physics*, ed. M. Kuster, Springer-Verlag (2010) [astro-ph/0610440].

*30 R. D. Peccei, H. Quinn, *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 1440 (1977); *Phys. Rev. D*, **16**, 1791 (1977).

*31 S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 223 (1978); F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 279 (1978).

化への制限[*32]から $M > 10^7$ GeV が得られ，超新星 SN 1987A の観測[*33]からは $M > 10^{10}$ GeV が得られている．その後，ペチェイ–クイン模型の一般化がなされ[*34]，M は任意の値を取る自由なパラメータとみなされるようになった．これから見るように，宇宙論的考察からは M に対する**上限値**[*35]が得られ，上記の下限値と組み合わせると M の許容範囲は非常に狭いものとなっている．

宇宙論的なアクシオン場は空間的に一様だと思われている[*36]．ロバートソン–ウォーカー計量を用いると，エネルギー密度と圧力はそれぞれ式（B.66）と式（B.67）で与えられ，

$$\rho_a = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_a^2\varphi^2, \qquad p_a = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m_a^2\varphi^2, \tag{3.4.17}$$

エネルギー保存の式（1.1.32）（あるいは式（3.4.15）で与えられる作用から直接導かれるオイラー–ラグランジュ方程式）からは場の方程式を導くことができる．

$$\ddot{\varphi} + 3H(t)\dot{\varphi} + m_a^2(t)\varphi = 0. \tag{3.4.18}$$

$H(t) \gg m_a(t)$ が成り立つような宇宙早期では $m_a(t)$ が無視でき，式（3.4.18）の解は $\dot{\varphi} =$ 一定と $\dot{\varphi} \propto 1/a^3$ で与えられる．特異解を取り除けば，早期には $\varphi(t)$ は一定値 φ_0 を取り，（パラメータの微調整をしないことにすれば）その値は M 程度の大きさだと期待できる．その後 $H(t)$ が $m_a(t)$ 以下となって $\varphi(t)$ が速い振動を始めると，式（3.4.18）は WKB 近似を用いて解くことができ，以下の解を与える．

$$\varphi(t) \to \varphi_1 \left(\frac{a(t_1)}{a(t)}\right)^{3/2} \cos\left(\int_0^t m_a(t)\,dt + \alpha\right), \tag{3.4.19}$$

ここで t_1 は $H(t_1) = m_{a0}$ となる時刻，φ_1 は $\varphi_0 \approx M$ 程度の大きさを持つ定数を表す．α はより詳細な研究なしには決めることのできない位相であるが，幸いにも我々の目的のためにはその値を知る必要はない（たとえば，もし $m_a(t)$

---

*32 D. A. Dicus, E. W. Kolb, V. I. Teplitz, R. V. Wagoner, *Phys. Rev. D*, **18**, 1829 (1978); *Phys. Rev. D*, **22**, 839 (1980).

*33 このトピックに関するレビューは，M. S. Turner, *Phys. Rep.*, **197**, 67 (1990); G.G. Raffelt, *Phys. Rep.*, **198**. 1 (1990); P. Sikivie, 脚注 26 を参照．

*34 J. E. Kim, *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 103 (1979); M. Dine, W. Fischler, M. Srednicki, *Phys. Lett.*, **104B**, 199 (1981); M. B. Wise, H. Georgi, S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.*, **47**, 402 (1981).

*35 J. Preskill, M. B. Wise, F. Wilczek, *Phys. Lett.*, **120B**, 127 (1983); L. F. Abbott, P. Sikivie, *Phys. Lett.*, **120B**, 127 (1983); M. Dine, W. Fischler, *Phys. Lett.*, **120B**, 137 (1983). レビューは，J. E. Kim, *Phys. Rep.*, **150**, 1 (1987); M. S. Turner, *Phys. Rep.*, **197**, 68 (1990) を見よ．

*36 ゼロでない波数を持つ成分ももちろん存在するが，そのような成分のエネルギー密度は，空間的に一様でコヒーレントな場 $\varphi(t)$ が持つエネルギー密度よりも速く減少する．

が一定値 m_{a0} を持ち宇宙が放射優勢だとすれば，$\varphi_1 = 2^{3/2}\pi^{-1/2}\Gamma(5/4)\varphi_0 = 1.446\varphi_0$，および $\alpha = -3\pi/8$ となる）．$m_a \gg H$ のとき，$a(t)$ は余弦（cos）の位相よりもずっとゆっくり変化するので，t_1 以降の時刻におけるエネルギー密度は式（3.4.17）から以下のように与えられる．

$$\rho_a(t) \to \frac{1}{2} m_a^2 \varphi_1^2 \left(\frac{a(t_1)}{a(t)}\right)^3. \tag{3.4.20}$$

この値を現在の時刻まで進化させるため，以下に着目しよう．もし時刻 t_1 で宇宙が放射優勢で，$k_{\mathcal{B}}T(t_1)$ よりもずっと小さい質量を持つ粒子が $\mathcal{N}_1$ 種類あるとしよう（これは実効的な種類数で，粒子と反粒子のスピン状態数をそれぞれ数え上げ，フェルミ粒子の寄与には 7/8 かけたものである）．すると，現在の時刻 t_0 における光子の温度は，

$$T_{\gamma 0} = \mathcal{N}_1^{1/3} T(t_1) a(t_1)/a(t_0)$$

で与えられる．因子 $\mathcal{N}_1^{1/3}$ は，時刻 t_1 と t_0 の間で粒子と反粒子の対消滅による光子の温度の上昇によっている．温度 $T(t_1)$ は時刻 t_1 における宇宙の膨張率が以下で与えられることから決められる．

$$m_a \equiv H(t_1) = \sqrt{\frac{8\pi G \mathcal{N}_1 a_{\mathcal{B}} T^4/2}{3}} = \sqrt{\frac{4\pi^3 G \mathcal{N}_1}{45}} (k_{\mathcal{B}} T_1)^2.$$

これらの結果を式（3.4.20）に代入すれば，現在の時刻におけるアクシオンのエネルギー密度を導くことができる．

$$\rho_a(t_0) \simeq \frac{1}{2} m_a^{1/2} \mathcal{N}_1^{-1/4} \varphi_0^2 \left(\frac{4\pi^3 G}{45}\right)^{3/4} (k_{\mathcal{B}} T_{\gamma 0})^3. \tag{3.4.21}$$

φ_0 は M と同程度の大きさだと思われるので，あらゆる 1 程度の大きさの因子を無視し，式（3.4.16）を代入すれば，

$$\rho_a \approx \frac{F_\pi^2 m_\pi^2 G^{3/4} (k_{\mathcal{B}} T_{\gamma\,0})^3}{m_a^{3/2}} \tag{3.4.22}$$

を得る．これより，アクシオンによる質量密度パラメータへの寄与 Ω_a が以下の式で与えられる．

$$\Omega_a h^2 \approx \left(m_a/10^{-5}\mathrm{eV}\right)^{-3/2}. \tag{3.4.23}$$

アクシオン場は空間的に一様なので，$m_a \gg H$ の場合のアクシオンのエネルギーは，ほぼ静止状態にあって有限の質量を持つ粒子のエネルギーと同じ形で与えられる．もしアクシオンが冷たい暗黒物質すべてを説明するならば $m_a \approx 10^{-5}$ eV であり，それは $M \approx 10^{12}$ GeV に相当する．もしアクシオンが暗黒物質密度の一部のみを説明するならば，m_a の下限値と M の上限値が得られる．

アクシオンと物質の相互作用は非常に弱いため，WIMP を探すために使われている原子核反跳を用いて検出することができない．1 つの可能性は，宇宙論的なアクシオンが非常に強い磁場によって光子に変えられる効果を観測することである[*37]．この方法を用いることで，太陽内部で生成されるであろうアクシオンのパラメータ領域に制限がつけられている[*38]．アクシオン場 $\varphi(x)$ と電磁場の相互作用は $g_{a\gamma}\,\varphi\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ の形を取ると思われ，$g_{a\gamma}$ は $\alpha/2\pi M$ 程度の大きさである．したがって，もし太陽中の光子が原子核周辺の強い電場によってアクシオンに変われば，これらの太陽アクシオンを実験室で作り出された強磁場で光子に戻して検出できるかもしれない．そのような光子は観測されなかったため，質量が 0.02 eV よりも軽いアクシオンに対して $|g_{a\gamma}| < 1.16 \times 10^{-10}$ GeV^{-1} という制限がついている．これは，より早期に行われた実験の制限よりもずっと厳しい[*39]．アクシオン暗黒物質実験（Axion Dark Matter Experiment）と呼ばれるアクシオン探査実験[*40]では，磁場によってアクシオンをマイクロ波光子に変え，その光子をマイクロ波空洞共振器で検出することで銀河系ハロー中のアクシオンを探している．この実験からは (1.98–2.17)×10^{-6} eV という非常に狭い質量の範囲のアクシオンの質量密度に上限値を与えている．これらの実験結果はすべての暗黒物質がアクシオンであるという仮定と矛盾するものではないが，この種の実験の感度が将来改善すれば，アクシオンが暗黒物質であるというモデルを棄却できるかもしれないし，あるいはアクシオンを発見できるかもしれない．

超対称性理論の枠組みでは，アクシオンの超対称性パートナーはスピン 1 を持ち，**アクシーノ**と呼ばれる．これはおそらく $R = -1$ を持つ粒子の中で最も軽い

[*37] P. Sikivie, *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 1415 (1983); *Phys. Rev. D*, **32**, 2988 (1985).

[*38] K. Zioutas *et al.*, CERN Axion Solar Telescope collaboration, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 121301 (2005) [hep-ex/0411033].

[*39] この実験，およびより早期の実験は以下の文献でレビューされている．G. G. Raffelt, contribution to *XI International Workshop on Neutrino Telescopes* [hep-ph/0504152].

[*40] L. D. Duffy *et al.*, *Phys. Rev. D*, **74**, 012006 (2006) [astro-ph/0603108]，およびそこで引用されているより早期の文献も見よ．

だろうから，安定である．アクシーノは，他のより重い $R = -1$ を持つ粒子が崩壊することで非熱的に生成することができ[*41]，さらに熱的に生成することもできる[*42]．アクシーノもまた，冷たい暗黒物質の粒子の候補になり得る．

[*41] L. Covi, J. E. Kim, L. Roszkowski, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4180 (1999).

[*42] L. Covi, H. B. Kim, J. E. Kim, L. Roszkowski, *J. High Energy Phys.*, **0105**, 033 (2001) [hep-ph/0101009]; A. Brandenburg, F. D. Steffen, *J. Cosm. & Astropart. Phys.* **0408**. 008 (2004) [hep-ph/0405158].

第4章 インフレーション

これまで3つの章を使って述べてきたように，我々は，電子–陽電子が対消滅した時刻から現在までの宇宙の進化の歴史はそれなりの自信を持って理解できていると考えて良い．しかしそれよりも早期の宇宙に関しては，今のところ推測する他はない．過去四半世紀に渡って話題の中心となってきたアイデアは以下のようなものである．ロバートソン–ウォーカースケール因子 $a(t)$ が $\sqrt{t}$ に比例して大きくなる放射優勢期以前には**インフレーション**と呼ばれる時期があり，そこでは宇宙のエネルギー密度はゆっくりと時間変化する真空のエネルギーによって支配され，$a(t)$ はほぼ指数関数的に大きくなる．宇宙初期における指数関数的宇宙膨張の可能性は数人の研究者によって指摘されていたが[*1]，当時はほとんど注目されなかった．インフレーションの宇宙論的重要性を示すことにより，インフレーション宇宙の可能性への興味を大いに刺激したのはアラン・グースである[*2]．

グースは，彼（およびヘンリー・タイ）が考えていた大統一理論のモデルでは，スカラー場がポテンシャルの極小値に捕らえられることがあるのに気がついた．この極小値は，彼のモデルでは大統一対称性が破れていない状態に相当する．このときの真空のエネルギーは宇宙が膨張しても一定のままであり，一定の宇宙膨張率，すなわち指数関数的に増大する $a(t)$ を生み出す．しばらくすると量子力学的なトンネル効果によってスカラー場はポテンシャル障壁を通り抜け，大局的な最小値，つまり現在の真空に対応する値に向かってポテンシャルを転がり始め，インフレーションは終了する．これだけではさして重要な結果ではないが，グー

[*1] A. A. Starobinsky, *JETP Lett.*, **30**, 682 (1979); *Phys. Lett.*, **B 91**, 99 (1980); D. Kazanas, *Astrophys. J.*, **241**, L59 (1980); K. Sato, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **195**, 467 (1981).

[*2] A. Guth, *Phys. Rev.*, **D 23**, 347 (1981). グースはインフレーション理論にまつわるエピソードを以下の著書の中で述べている．*The Inflationary Universe*: *The Quest for a New Theory of Cosmic Origins*, Helix Books/Addison Wesley (1997).

スは，インフレーションの時期が存在することで，1.5 節で述べた宇宙論の重要問題の 1 つが解決されることに気がついた．それは宇宙の「平坦性問題」，つまりなぜ初期宇宙では空間曲率が非常に小さいのか？という問題である．間もなくグースは，インフレーションは他の問題も解決することに気がついた．そのうちのいくつかの問題は，グース自身もそれが問題になっているとは知らなかったものである．平坦性問題およびその他の問題は 4.1 節で議論する．

まもなくしてグースや他の研究者が気づいたように，彼のインフレーションモデルは 4.2 節で述べる致命的な欠陥を持っていた．そのためグースの「古いインフレーション」は「新しいインフレーション」に取って代わられた．このモデルはアンドレイ・リンデ[*3]，およびアンドレアス・アルブレヒトとポール・スタインハート[*4]による．新しいインフレーション理論で導入された重要な要素は，1 個，あるいは複数個のスカラー場がポテンシャルの坂をゆっくりと転がり落ちること（スローロール，slow roll）でほぼ指数関数的な膨張を達成する点である．これに関しては 4.2 節で詳しく学ぶ．この考えは「カオス的インフレーション（chaotic inflation）」や「永久インフレーション（eternal inflation）」，さらにその他の変形モデルの基礎となっている．いくつかのモデルは 4.3 節で手短に紹介する．

これまでのところインフレーションの詳細はよくわかっておらず，インフレーションというアイデアそのものも推定の域を出ていない．しかし，インフレーションが現実に起こったという可能性は高くなってきている．インフレーション理論が提唱された時点で解決された宇宙論の古典的問題に加え，インフレーションは実験データを説明する上で 1 つ非常に重要な成功を納めた．それは，宇宙マイクロ波背景放射と宇宙の大規模構造のゆらぎの持つある性質に関する予言である．この点に関しては 10 章で立ち戻ることにする．その前に 5 章と 6 章で宇宙初期におけるゆらぎの成長を学び，7 章，8 章，および 9.5 節でこれらのゆらぎの観測について学ぶ必要がある．

4.1　3 つの問題

本節では宇宙論の 3 つの古典的問題を概観し，それぞれの問題を解決するのに必要なインフレーションの性質を調べる．この目的のため，ここでは単純に宇宙

[*3] A. D. Linde, *Phys. Lett. B*, **108**, 389 (1982); **114**, 431 (1982); *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 335 (1982).

[*4] A. Albrecht, P. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 1220 (1982).

は初期に指数関数的な膨張を起こしたと仮定し，どうしてそうなったかに関してはまだ考えないことにする．

平坦性

1.6 節と 1.8 節で見たように，Ia 型超新星の赤方偏移–距離関係と古い星の年齢の測定結果は曲率パラメータ Ω_K がゼロの宇宙モデルで説明できるが，Ω_M の値を変えればゼロでない曲率を持つ宇宙モデルでも説明できる．7.2 節で議論する宇宙マイクロ波背景放射のデータを加えれば $\Omega_K = 0$ の宇宙が最もデータと整合する．小さいがゼロでない Ω_K は存在するかもしれないが，これらの観測から $|\Omega_K| < 1$ であることは間違いないだろう．しかし，Ω_K は時間変化する曲率パラメータ $-K/a^2H^2 = -K/\dot{a}^2$（K は定数）の現在の値に過ぎない．宇宙の温度が 10^4 K に下がってから現在まで $a(t)$ は $t^{2/3}$ に比例して増加してきたのだから，$|K|/\dot{a}^2$ もまた $t^{2/3} \propto T^{-1}$ に比例して増加してきたはずである．よって，もし現在 $|\Omega_K| < 1$ であれば，温度 10^4 K での曲率パラメータ $|K|/\dot{a}^2$ は 10^{-4} より小さかったことになる．より早期では $a(t)$ は $t^{1/2}$ に比例するので，$|K|/\dot{a}^2$ は $t \propto T^{-2}$ に比例して増加していた．温度 10^4 K で $|K|/\dot{a}^2$ が 10^{-4} 以下になるには，電子–陽電子の対消滅の時期（大雑把にいって，宇宙のヘリウム存在量の測定値を説明する中性子–陽子の転化が始まった時刻），温度にして $T \approx 10^{10}$ K，の頃 $|K|/\dot{a}^2$ は 10^{-16} 以下でなければならなかったことになる．より早期に行けば行くほど，この値はもっとずっと小さかったはずである*1．これはパラドックスというわけではない．つまり曲率が極端に小さくていけない理由はないが，物理屋はこういう小さな数に行き当たると，なぜそれがそんなに小さな値を取らねばならないのか説明したがるものである．

グースは，インフレーション中 $\dot{a}/a$ はほとんど一定であるから，$|K|/a^2H^2$ はほぼ a^{-2} に比例して**減少**することに気がついた．したがって，ビッグバン宇宙が始まった時刻に空間が非常に平坦であることを説明するのに任意の仮定を置かなくても良くなった．もし放射優勢のビッグバン宇宙の前にインフレーションが十分な期間起これば，曲率は自動的に無視できるほど小さくなるからである．

議論をより定量的にしよう．まず，宇宙がインフレーションを起こして $a(t)$ がある大きな数 $e^{\mathcal{N}}$ だけ大きくなったとする．その後，物質と放射のエネルギー密

---

*1 R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, in *General Relativity–An Einstein Centenary Survey*, eds., S. Hawking, W. Israel, Cambridge University Press (1979).

度が等しくなるまでは宇宙は放射優勢，さらにその後物質優勢期と真空のエネルギー優勢期を経て現在に至るものとする．もしインフレーションが始まる時刻で $|K|/a^2H^2$ が 1 程度の大きさを持っていたとすれば，インフレーションが終わった時刻 t_I における $|K|/a^2H^2$ の値 $|K|/a_I^2H_I^2$ は $e^{-2\mathcal{N}}$ 程度の大きさになる（a_I と H_I はそれぞれインフレーションが終わった時刻におけるロバートソン–ウォーカースケール因子と宇宙の膨張率を表す）．現在時刻での Ω_K の値は，

$$|\Omega_K| = \frac{|K|}{a_0^2H_0^2} = e^{-2\mathcal{N}}\left(\frac{a_IH_I}{a_0H_0}\right)^2 \qquad (4.1.1)$$

と書けるから，もしインフレーションによる宇宙の膨張量が以下で与えられる下限値よりも大きければ，平坦性問題を解決できることになる．

$$e^{\mathcal{N}} > \frac{a_IH_I}{a_0H_0}. \qquad (4.1.2)$$

この下限値を計算する際，次のような若干危なっかしい仮定を置くことにする．インフレーションの終了時刻から放射優勢期の開始時刻までの間にスケール因子や宇宙の膨張率は急激に変化しなかった，すなわち，

$$a_IH_I \simeq a_1H_1 \qquad (4.1.3)$$

であったと仮定する．ここで下付き添字 1 は放射優勢期の開始時刻を表す．放射優勢期が始まった時刻から現在までの膨張量 a_0/a_1 は，膨張率の比で書き表すことができる．放射優勢期と物質優勢期すべてに渡って膨張率は，

$$H = \frac{H_{\rm EQ}}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{a_{\rm EQ}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{\rm EQ}}{a}\right)^4}$$

で与えられ，$a_{\rm EQ} = a_0\Omega_R/\Omega_M$ と $H_{\rm EQ} = \sqrt{2\Omega_M}H_0(a_0/a_{\rm EQ})^{3/2}$ はそれぞれ物質と放射のエネルギー密度が等しくなった時刻でのスケール因子と膨張率を表す．$a = a_1 \ll a_{\rm EQ}$ とすれば，

$$H_1 = \frac{H_{\rm EQ}}{\sqrt{2}}\left(\frac{a_{\rm EQ}}{a_1}\right)^2 \qquad (4.1.4)$$

を得るから，これを用いて t_1 を消去する．すると式（4.1.2）の制限はより便利な形に書き表せて，

$$e^{\mathcal{N}} > \left(\frac{\Omega_M a_{\rm EQ}}{a_0}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{H_1}{H_0}} = \Omega_R^{1/4}\sqrt{\frac{H_1}{H_0}} = \left(\Omega_R \frac{\rho_1}{\rho_{0,\rm crit}}\right)^{1/4} = \frac{[\rho_1]^{1/4}}{0.037\ h\ {\rm eV}} \tag{4.1.5}$$

を得る．ここで ρ_1 は放射優勢期が始まった時刻での宇宙のエネルギー密度，$\rho_{0,\rm crit} = [3.00 \times 10^{-3}\ {\rm eV}]^4 h^2$ は式（1.5.28）で与えられる現在の宇宙の臨界密度である．

これから先に進むには，インフレーションが終わった時刻でのエネルギー密度に関して何らかの知識が必要となる．宇宙の元素合成の理論の成功より，ρ_1 は中性子–陽子の転化が始まった時刻のエネルギー密度である $[1\ {\rm MeV}]^4$ よりも大きくなければならない．もし ρ_1 が $[1\ {\rm MeV}]^4$ であったとすれば，式（4.1.5）と $h = 0.7$ より，宇宙はインフレーション中に 4×10^7 倍以上膨張しなければならなかった計算になる．これは自然対数を取れば 17 以上に相当する．もう一方の極限でいえば，ρ_1 はプランクエネルギー密度 $G^{-2} = [1.22 \times 10^{19}\ {\rm GeV}]^4$ よりも大きくはないだろうから，もし ρ_1 が $[1.22 \times 10^{19}\ {\rm GeV}]^4$ であったとすれば，式（4.1.5）と $h = 0.7$ より宇宙はインフレーション中に 5×10^{29} 倍以上膨張した計算になる．自然対数を取れば 68 以上となる．10.3 節において，ρ_1 は $[2 \times 10^{16}\ {\rm GeV}]^4$ 程度であったことを示すいくつかの証拠を挙げる．もしそうであれば $h = 0.7$ のときの $e^{\mathcal{N}}$ は少なくとも 8×10^{26} で，それは $\mathcal{N} > 62$ に相当する．

インフレーションがあったことを証明するという観点からすれば，宇宙の平坦性に関する議論は最も説得力がないものだといえる．なぜなら，過去に $|K|/\dot{a}^2$ が非常に小さかったというのは，単に（インフレーションのことを知る前はみんなそうしていたように）空間は厳密に平坦であり，今も昔も $K = 0$ だと仮定してしまうことで説明できるからである．一方で，4.3 節で議論するようにインフレーションは，非常に大きなスケールで見た宇宙は一様でもなければ等方的でもなく，観測されている平坦性はまさにインフレーションの結果である，という興味深い可能性を提起する．

インフレーション期の加速膨張によって $|K|/\dot{a}^2$ は初期値である 1 程度の値から減少するが，その後の放射優勢期と物質優勢期の減速膨張の間に $|K|/\dot{a}^2$ が増加することで現在再び 1 程度の大きさまで戻ったすれば，それはものすごい偶然だといえるだろう．むしろ，現在の $|\Omega_K|$ は 1 よりも非常に大きいか非常に小さいかどちらかの値を取るのが自然だと思われ，観測から $|\Omega_K|$ は 1 より大きくな

いという結果が得られているのだから，インフレーション理論は $|\Omega_K| \ll 1$ を示唆していると考えて良いだろう（ただし，この種の推論を用いると真空のエネルギーは現在の物質密度よりもずっと小さいことが示唆されるが，それは観測事実に反する）．

地平線

宇宙マイクロ波背景放射が非常に等方的であるという観測事実は，ある問題を提起する．物質優勢，あるいは放射優勢時の地平線は t 程度の大きさであることを思い出そう．$a(t)$ は最終散乱の時刻から $t^{2/3}$ に比例して増加したのだから，最終散乱の時刻での地平線は $d_H \approx H_0^{-1}(1+z_L)^{-3/2}$ 程度の大きさになる（式 (2.6.32) を見よ）．また，式 (2.6.29) によれば最終散乱面までの角径距離 d_A は $H_0^{-1}(1+z_L)^{-1}$ 程度の大きさなので，最終散乱時刻での地平線は現在 $d_H/d_A \approx (1+z_L)^{-1/2}$ ラジアン程度の見込み角で観測されるはずである．$z_L \simeq 1100$ を代入すればこの角度はおよそ 1.6 度である．したがって，物質優勢あるいは放射優勢な宇宙では因果律のために初期の非一様性を均一化することができず，z_L において数度以上離れた点の温度は等しくないはずである．これは，マイクロ波背景放射が発見されて以来観測されている，大角度スケールでの背景放射のほぼ完全な一様性に反する．インフレーションはこの問題に以下のような説明を与える．我々が現在観測できる宇宙の領域はインフレーションが起きる以前は微小な空間に過ぎず，そのような微小な空間を一様化するには十分な時間があった，というのがその説明である．

これがインフレーションによる宇宙の膨張量にどのような制限を与えるかを考えるため，まず 1.13 節で学んだように，最終散乱時刻 t_L における地平線の固有長さが，

$$d_H(t_L) \equiv a(t_L) \int_{t_*}^{t_L} \frac{dt}{a(t)} \tag{4.1.6}$$

であることを思い出そう．t_* はインフレーションが始まる時刻とする（この時刻は時間の始まりである $-\infty$ として良いかもしれない）．放射優勢と物質優勢の時期の寄与は宇宙マイクロ波背景放射の等方性を説明するには小さ過ぎることをすでに見たので，積分はインフレーションの時期の寄与に支配されるものと仮定する．具体的には，インフレーション中に $a(t)$ は膨張率 H_I で指数的に膨張した，

つまり，

$$a(t) = a(t_*) \exp\Big(H_I(t - t_*)\Big) = a_I \exp\Big(-H_I(t_I - t)\Big)$$

であると仮定する．ここで t_I はインフレーションが終了した時刻，そして $a_I = a(t_I)$ を表す．インフレーション中の膨張量の自然対数 $\mathcal{N} \equiv H_I(t_I - t_*)$ を用いれば，式（4.1.6）は以下のように書ける．

$$d_H(t_L) = \frac{a(t_L)}{a_I H_I}\left[e^{\mathcal{N}} - 1\right]. \tag{4.1.7}$$

地平線問題を解決しようと思えば $e^{\mathcal{N}} \gg 1$ でなければならないので，式（4.1.7）の角括弧中の -1 は無視できる．

大角度スケールで観測されている宇宙マイクロ波背景放射の等方性を説明するには $d_H(t_L) > d_A(t_L)$ が必要となる．$d_A(t_L)$ は最終散乱面までの角径距離で，式（2.6.29）より以下のように与えられる．

$$d_A(t_L) \approx \frac{a(t_L)}{H_0 a_0}. \tag{4.1.8}$$

宇宙マイクロ波背景放射の等方性の条件 $d_H(t_L) > d_A(t_L)$ より，インフレーション中の宇宙の膨張量に対して以下の下限値が得られる．

$$e^{\mathcal{N}} > \frac{a_I H_I}{a_0 H_0}. \tag{4.1.9}$$

これは平坦性問題を解決するのに必要な条件式（4.1.2）と等しい．ここで再び，インフレーションが終わってから放射優勢宇宙が始まるまでの間に何も起こらなかったと仮定し式（4.1.3）を用いれば，地平線問題を解決するのに必要な条件として，$\rho_1 \simeq [1\ \mathrm{MeV}]^4$ のときは $\mathcal{N} > 17$，$\rho_1 \simeq [2 \times 10^{16}\ \mathrm{GeV}]^4$ のときは $\mathcal{N} > 62$，そして $\rho_1 \simeq G^{-2}$ のときは $\mathcal{N} > 68$ を得る．10 章で見るように，地平線問題を解決するのに必要な膨張量の自然対数が $\mathcal{N} = 17$，62，68，あるいは他のどのような値を取ろうと，現在の宇宙のゆらぎの測定を通して探ることができるのはインフレーションが終わった時刻から測って $\mathcal{N}$ までの間の出来事だけである．

最終散乱の時刻 t_L が $\mathcal{N}$ の条件式に現れないので，この式は，現在赤方偏移 $z < z_{\mathrm{EQ}}$ で観測される光が光源から放射された時刻での地平線の大きさが，その時刻における観測可能な宇宙の大きさよりも大きいという条件と等しい．実際，式（4.1.9）は現在の時刻における地平線の大きさが，現在観測可能な宇宙の大きさ（ほぼ $1/H_0$）より大きいという条件とも等しい．

磁気単極子

大統一理論では，ある高い対称性を持つ単純な群に属する局所対称性がエネルギー $M \approx 10^{16}$ GeV で自発的に破れ，群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ に属する標準模型のゲージ対称性になるとする．このとき，すべての場合において，対称性を破るスカラー場はあるねじれた配位で残る．その配置はゼロでない磁荷を持ち，いかなる連続的な過程を用いても消すことができない*2．これはある宇宙論モデルに対して問題となる*3．この相転移が起こる前のスカラー場は地平線，つまり宇宙創成の時刻からある時刻までに光が進むことのできた最大の距離，を超える距離では相関を持っていないはずである．標準的なビッグバン理論では，ある時刻 t における地平線の大きさは $t \approx (G(k_{\mathcal{B}}T)^4)^{-1/2}$ 程度の大きさ（ここで $G \simeq (10^{19}\ \mathrm{GeV})^{-2}$ はニュートンの重力定数）なので，宇宙の温度が $M/k_{\mathcal{B}}$ まで下がった頃に生成される磁気単極子の数密度は $t^{-3} \approx (GM^4)^{3/2}$ 程度となる．これは $T \approx M/k_{\mathcal{B}}$ における光子の数密度 $\approx M^3$ と比べて $(GM^2)^{3/2}$ 倍程度小さい．$M \approx 10^{16}$ GeV を代入すれば，10^{-9} 程度小さいことになる．もし磁気単極子が対消滅しなければ，この数密度比は現在の時刻までほぼ一定に保たれる．しかし，現在の宇宙では核子 1 個あたりにマイクロ波背景放射の光子が少なくとも 10^9 個あるのだから，少なくとも核子 1 個あたりに磁気単極子が 1 個あることになり，観測とまったく合わない．

このパラドックスは，インフレーション宇宙モデルへの興味を引き起こす要因の 1 つとなった．インフレーションモデルでは，磁気単極子が生成される前に指数関数的宇宙膨張が起これば地平線が非常に大きくなり，磁気単極子が生成された後（ただし光子が生成される宇宙の再加熱の時期以前）に指数関数的宇宙膨張が起これば磁気単極子と光子の数密度比が非常に小さくなる．より詳しく見てみよう．鉄鉱石や海水中の磁気単極子探査より，磁気単極子の数は 1 グラムあたり 10^{-6} 個以下，あるいは核子 1 個あたり 10^{-30} 個以下と制限されている*4（この数密度では，たとえ磁気単極子の質量が 10^{19} GeV であっても宇宙の質量密度への寄与は無視できる）．インフレーションによって磁気単極子と光子の数密度比

---

*2 このトピックに関する議論は QTF 第 2 巻 23.3 節（邦訳『場の量子論 4 巻』23.3 節）を見よ．

*3 Ya. B. Zel'dovich, M. Yu. Khlopov, *Phys. Lett. B*, **79**, 239 (1978); J. Preskill, *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 1365 (1979). レビューは，J. Preskill, *Annual Rev. Nucl. Part. Science*, **34**, 461 (1984) を見よ．

*4 レビューは，Particle Data Group, *Phys Lett. B*, **582**, 1001 (2004) を見よ．

を 10^{-30} 倍だけ減らすためには，（光子が生成される宇宙の再加熱の時期以前のある時刻において）地平線が 10^{10} 倍にならねばならない．すなわち，インフレーション後の地平線 $e^{\mathcal{N}}/H_1$ が，インフレーションがないときの値 $(GM^4)^{-1/2}$ よりも少なくとも 10^{10} 倍大きくなければならない．もし $H_1 \approx (GM^4)^{1/2}$ だとすれば，膨張量の自然対数 $\mathcal{N}$ は $\ln 10^{10} = 23$ より大きくなければならない．もちろん，インフレーションが終わって宇宙が再加熱した後の宇宙の温度が大統一理論のエネルギースケール M よりも低く，大統一理論の対称群が常に破れていた（つまり大統一理論の対称性が破れていない時期が存在しなかった）とすれば，磁気単極子は生成されないのだから磁気単極子問題は自動的に解決される．さらには，インフレーションを用いないより単純な解決策として，標準模型のゲージ群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ に自発的に破れる単純なゲージ群がなかった，という可能性を考えることもできる．

以上の 3 つの問題の中で最も深刻なのは地平線問題である．すでに見たように，平坦性問題と磁気単極子問題はインフレーションを用いずとも解決できる．また，地平線問題を解決するのに必要な宇宙の膨張量は，平坦性問題のみならず磁気単極子問題も解決する．もし放射優勢宇宙がエネルギー密度 $\rho_1 > [10^{15}\ \mathrm{GeV}]^4$ で始まったとすれば，平坦性問題と地平線問題を解決するためには少なくとも膨張量の自然対数が 59 あるインフレーションが必要となるが，これは磁気単極子問題を解決するのに十分な膨張量である．一方，もし $\rho_1 < [10^{15}\ \mathrm{GeV}]^4\,\mathrm{GeV}$ であれば，通常の大統一理論の描像ではそもそも磁気単極子が存在しない．

4.2 スローロールインフレーション

グースの論文では，インフレーションは 1 次の相転移が遅れることで生じると考えられていた．この描像では，スカラー場はポテンシャルの極小値に一時的に捕らえられ，その後量子力学的なトンネル効果によってポテンシャル障壁を通り抜け，大局的な最小値に向かってポテンシャルを転がり落ちる．しかしその後すぐ，「グレイスフル・イグジット（graceful exit，インフレーションをうまく終わらせる）問題」と呼ばれる問題のため，もとのアイデアではうまくいかないことが示された[*1]．過冷却状態にある最初の「偽の真空（false vacuum）」状態から「真

[*1] S. W. Hawking, I. G. Moss, J. M. Stewart, *Phys. Rev. D*, **26**, 2681 (1982); A. H. Guth, E. J. Weinberg, *Nucl. Phys. B*, **212**, 321 (1983).

の真空（true vacuum）」状態への遷移はすべての場所で同時に起こるのではない．まず真の真空状態にある小さな泡があちこちででき，それらの泡が周囲の，スカラー場がまだ極小値に捕らえられていて偽の真空状態にある領域に向かって急速に膨張する*2．これはちょうど，過冷却状態にある水蒸気で水滴が形成されていく過程に似ている．問題は，相転移の際に発生する潜熱が泡の壁の部分に集中するため泡の内部がほぼ空っぽになり，宇宙のエネルギー分布が非常に非一様で非等方になってしまうことである．初めに，グースはインフレーション宇宙で形成される多くの泡は衝突合体し，現在のほぼ一様な宇宙ができたと考えていた．しかしこれは起こりえない．周囲にある偽の真空状態はインフレーションによる指数関数的膨張を続けるから，泡自身が膨張するよりも速く泡同士が互いに遠ざかり，決して衝突することがないからである．

グースのインフレーションモデルは，まもなくしてリンデ，およびアルブレヒトとスタインハートによる「新しいインフレーション」と呼ばれるモデルに取って代わられた*3．最初，新しいインフレーションは大統一理論の対称性の破れに関するあるモデルを用いて定式化されていた．これは，シドニー・コールマンとエリック・ワインバーグ*4によって導入された対称性の破れの機構を用いたものである．この機構では，スカラー場 φ のゼロ温度におけるポテンシャルは $\varphi=0$ での 2 階微分がゼロとなるように人工的に調整されている．1 ループの量子力学的放射補正を加えたポテンシャルは，$\varphi^4\ln(\varphi/M)$ に既知の正の数をかけたもので与えられる．M は任意の値を取る正の定数で，M を変化させることは φ^4 の結合定数を変化させることに等しい．このポテンシャルは $\varphi=0$ で不安定な停留点を持ち，$\varphi_0=Me^{-1/4}$ で最小値を取る．有限温度 T ではポテンシャルは $T^2\varphi^2$ に比例する 2 次の項を持ち，これによって $\varphi=0$ の停留点は極小値となる．この場合でも相転移は泡の形成を伴うが，低温度ではポテンシャル障壁の高さが非常に小さくなるため，泡の内部のスカラー場の値はほぼゼロから始まり，1.12 節で議論したような過程でポテンシャルをゆっくりと転がる．この間宇宙（泡を含む）は指数関数的に膨張する．最終的には場のエネルギーは通常の粒子に転化され，

---

*2 この過程の記述と，量子場の理論を用いた泡の形成の記述に関するもとの文献への引用は，QTF 第 2 巻 23.8 節（邦訳『場の量子論 4 巻』23.8 節）を見よ．

*3 A. D. Linde, *Phys. Lett. B*, **108**, 389 (1982); **114**, 431 (1982); *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 335 (1982); A. Albrecht, P. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 1220 (1982).

*4 S. Coleman, E. Weinberg, *Phys. Rev. D*, **7**, 1888 (1973).

粒子が泡を埋め尽くすようになる．そして我々が観測する宇宙は，このような 1 つの泡の中のほんの小さな一部分であると考える．

新しいインフレーションの結末は，泡の形成過程そのものよりも泡が形成された後にスカラー場がゆっくりと転がる過程によっている．実際，大統一理論やコールマン–ワインバーグ機構のような仮定は，インフレーションを起こすために必要ではない．必要なのは，**インフラトン**と呼ばれるスカラー場 φ があり，そのポテンシャル $V(\varphi)$ がある初期の時刻に大きく，非常に平坦であることだけである．このスカラー場は最初，ポテンシャルを非常にゆっくりと「転がる」（スローロール）ため，ハッブル定数は非常にゆっくりとしか減少せず，場があまり変化しない間に宇宙はほぼ指数関数的に膨張する．

これを定量的に議論するため，ロバートソン–ウォーカー時空において空間的に一様なスカラー場 $\varphi(t)$ を考え，そのポテンシャルを $V(\varphi)$ としよう．このスカラー場のエネルギー密度（式（B.66））と圧力（式（B.67））が（$\hbar = c = 1$ の単位系において），

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \qquad p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)$$

で与えられることを思い出そう．エネルギー保存の式 $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$ より，

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \tag{4.2.1}$$

が得られる．$H \equiv \dot{a}/a$ は時間変化する宇宙の膨張率で，スカラー場が宇宙のエネルギー密度を支配するときには以下の式で与えられる．

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right)}. \tag{4.2.2}$$

式（4.2.1）と（4.2.2）より，$\dot{H}$ に関する非常に有用な式を導くことができる．式（4.2.2）を 2 乗して時間微分し，式（4.2.1）を代入すれば，

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3}\left(\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + V'(\varphi)\dot{\varphi}\right) = -8\pi GH\dot{\varphi}^2$$

であるから，以下の式を得る．

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\varphi}^2. \tag{4.2.3}$$

さて，ほぼ指数関数的な膨張を行うには，膨張時間 $1/H$ の間の H の変化の割合 $|\dot{H}/H|(1/H)$ が 1 よりずっと小さくなくてはならない．つまり，以下の条件が

満たされねばならない．

$$|\dot{H}| \ll H^2. \tag{4.2.4}$$

式（4.2.3）と（4.2.2）より，この条件は以下のようにも読み替えられる．

$$\dot{\varphi}^2 \ll |V(\varphi)|. \tag{4.2.5}$$

これより $p \simeq -\rho$ が導かれ，膨張率は近似的に以下のように与えられる．

$$H \simeq \sqrt{\frac{8\pi G V(\varphi)}{3}}. \tag{4.2.6}$$

たいていの場合，膨張時間 $1/H$ の間の $\dot{\varphi}$ の変化の割合 $|\ddot{\varphi}/\dot{\varphi}|(1/H)$ もまた 1 よりずっと小さいと仮定されている．つまり，

$$|\ddot{\varphi}| \ll H|\dot{\varphi}|. \tag{4.2.7}$$

これより，式（4.2.1）における慣性力の項 $\ddot{\varphi}$ が無視できるようになり，以下の式を得る．

$$\dot{\varphi} = -\frac{V'(\varphi)}{3H} = -\frac{V'(\varphi)}{\sqrt{24\pi G V(\varphi)}}. \tag{4.2.8}$$

すると膨張時間 $1/H$ の間の H の変化の割合は，

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8\pi G}}\left|\frac{V'(\varphi)\dot{\varphi}}{V^{3/2}(\varphi)}\right| = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)}\right)^2 \tag{4.2.9}$$

で与えられるから，宇宙の指数関数的膨張は，以下の条件が満たされている限り続くことがわかる．

$$\left|\frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)}\right| \ll \sqrt{16\pi G}. \tag{4.2.10}$$

式（4.2.8）を用いれば，不等式（4.2.5）を満足するポテンシャルの条件は，

$$\left|\frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)}\right| \ll \sqrt{24\pi G} \tag{4.2.11}$$

と書けるが，これは不等式（4.2.10）によって満たされている．また，式（4.2.8）の両辺を時間微分して得られる式，

$$\ddot{\varphi} = -\frac{V''(\varphi)\dot{\varphi}}{3H} + \frac{V'(\varphi)\dot{H}}{3H^2} = \frac{V''(\varphi)V'(\varphi)}{9H^2} - \frac{V'^3}{48\pi G V^2} \tag{4.2.12}$$

を見ると，不等式（4.2.10）より右辺の最後の項の絶対値は $|V'(\varphi)|$ よりもずっと小さいから，$|\ddot{\varphi}|$ が $|V'(\varphi)|$ よりもずっと小さいという条件は $|V''(\varphi)| \ll 9H^2$，あるいは，

$$\left|\frac{V''(\varphi)}{V(\varphi)}\right| \ll 24\pi G \tag{4.2.13}$$

という条件に等しいことがわかる．こうして導かれた式（4.2.10）と（4.2.13）が，φ と $\dot{\varphi}$ がそれぞれゆっくり変化するのに必要な 2 つの「平坦性」条件である．原理的には，1 つ目の平坦性条件（4.2.10）を満たし，2 つ目の平坦性条件（4.2.13）を満たさないポテンシャルを考えることもできるが，そのようなケースは珍しく，特に以下で議論するような単純なポテンシャルではそのようなことは起こらない．

一般的にいって，これらの条件下での宇宙膨張は厳密に指数関数的ではないが，膨張量は指数関数的に大きくできる．ある時間間隔の間にスカラー場 $\varphi(t)$ が初期値 φ_1 から最終値 φ_2 まで変化し，$0 < V(\varphi_2) < V(\varphi_1)$ であったとしよう．このとき，不等式（4.2.10），(4.2.13）はどちらも満たされていたとする．この間にロバートソン–ウォーカースケール因子は以下の量だけ増加する．

$$\begin{aligned}\frac{a(t_2)}{a(t_1)} &= \exp\left[\int_{t_1}^{t_2} H dt\right] = \exp\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{H\, d\varphi}{\dot{\varphi}}\right] \\ &\simeq \exp\left[-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\frac{8\pi G V(\varphi)}{V'(\varphi)}\right) d\varphi\right].\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

$\varphi(t)$ が φ_1 から φ_2 まで変化する間，ポテンシャルは正で減少関数であるから，式（4.2.14）の指数関数の引数は正だ．不等式（4.2.10）より，この引数は $\sqrt{4\pi G}|\varphi_1 - \varphi_2|$ よりずっと大きいことがわかるので，φ が少なくとも $1/\sqrt{4\pi G} = 3.4 \times 10^{18}$ GeV だけ変化すれば，指数関数の引数が十分大きくなることがわかる．

スカラー場がこのような大きな値を持つからといって，ここまで用いてきた重力の古典的な扱いができなくなるわけではない．これは重要な点である．量子重力の効果を無視しても良い条件は，エネルギー密度がプランクエネルギー密度よりもずっと小さいという条件，すなわち，

$$|V(\varphi)| \ll (4\pi G)^{-2} \tag{4.2.15}$$

である．この条件は，$V(\varphi)$ が十分小さな結合定数に比例しているとすれば，たとえ φ がプランク質量 $\approx G^{-1/2}$ 程度の大きさであっても満足できる．式（4.2.10），

(4.2.13) で与えられる平坦性条件も，式 (4.2.14) で与えられる $\varphi(t)$ の変化に対する $a(t)$ の増加量も，結合定数には依存しない．

ポテンシャルの形に応じて，平坦性の条件式 (4.2.10)，(4.2.13) はスカラー場の初期値，もしくはポテンシャルに含まれるパラメータに対する条件を与える．初期値に関する条件を与えるものの例として，冪乗で書けるポテンシャル，

$$V(\varphi) = g\varphi^{\alpha} \tag{4.2.16}$$

を考えよう．g と α は任意の実数であるが，$g > 0$ で，$|\alpha|$ は 1 よりも何桁も大きいわけではないとする．平坦性の条件式 (4.2.10)，(4.2.13) は，どちらも結合定数 g の値に関係なく $|\varphi| \gg 1/\sqrt{4\pi G}$ の場合に満たされる．スカラー場の初期値が φ_1 で，最終値がそれよりもずっと小さい場合の宇宙の膨張量の自然対数は，式 (4.2.14) から $4\pi G\varphi_1^2/\alpha$ と得られる．したがって $\alpha = 4$ の場合，もし $|\varphi_1| > \sqrt{62/\pi G}$ であれば，インフレーション後の再加熱温度が 2×10^{16} GeV/$k_{\mathcal{B}}$ のときに地平線問題を解決するのに必要な膨張量の自然対数 62 が得られる．一方，このポテンシャルに対しては，量子重力の効果を無視できる条件式 (4.2.15) が $|g|$ に対する上限値を与える．たとえば $\alpha = 4$ の場合，式 (4.2.16) で与えられるポテンシャルは $g \ll (\sqrt{4\pi G}|\varphi|)^{-4}$ であれば条件式 (4.2.15) を満たすから，膨張量の自然対数 62 を得るのに必要な $|\varphi|$ の値に対しては，量子重力の効果を避けるには $g \ll 5 \times 10^{-6}$ が必要となる．このように小さな結合定数は，スカラー場が複数個あるような理論では避けることができる．たとえば「ハイブリッド・インフレーション」モデル*5では，1 つのスカラー場の実効的な自己結合定数 (φ^4 の係数) が小さいのは，もう一つの場が非常に小さな質量を持ち，そのため小さな期待値を持つからであると説明する．

かなり異色のインフレーションモデルではあるが，指数関数型ポテンシャルは式 (4.2.1) と (4.2.2) を厳密に解くことができる例としてよく知られている*6．

$$V(\varphi) = g\exp(-\lambda\varphi), \tag{4.2.17}$$

ここで g と λ は任意の定数を表す．以下が式 (4.2.1)，(4.2.2) の解になっている

---

*5 A. D. Linde, *Phys. Lett. B*, **259**, 38 (1991); *Phys. Rev.*, **D 49**, 748 (1994) [astro-ph/9307002].

*6 L. F. Abbott, M. B. Wise, *Nucl. Phys.*, **B 244**, 541 (1984); F. Lucchin, S. Matarrese, *Phys. Rev. D*, **32**, 1316 (1985); *Phys. Lett.*, **B 164**, 282 (1985); D. H. Lyth, E. D. Stewart, *Phys. Lett.*, **B 274**, 168 (1992).

ことは容易に確かめられる[*7].

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8\pi G g\varepsilon^2 t^2}{3-\varepsilon}\right), \tag{4.2.18}$$

$$a \propto t^{1/\varepsilon}, \qquad H = 1/\varepsilon t, \tag{4.2.19}$$

ここで ε は以下で与えられる正の無次元量を表す.

$$\varepsilon \equiv \frac{\lambda^2}{16\pi G}. \tag{4.2.20}$$

平坦性の条件式（4.2.10），(4.2.13）はそれぞれ $\varepsilon \ll 1$，$\varepsilon \ll 3/2$ と読み替えられ，したがって，

$$\varepsilon \ll 1 \tag{4.2.21}$$

の場合にのみ両方の条件が満たされる．このとき，g や φ の値には何の制限もない．厳密解は，より一般的なポテンシャルに対する近似的な計算の精度を確認するのに有用である．式（4.2.18）で与えられる厳密解を近似式（4.2.8）の解と比較してみよう．指数関数ポテンシャルのとき，近似解は，

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8\pi G g\varepsilon^2 t^2}{3}\right) \tag{4.2.22}$$

で与えられる．これと式（4.2.18）で与えられる厳密解との違いは，$\varepsilon \ll 1$ のときに確かに無視できる．同様に，時刻 t_1 から t_2 の間に場の値が φ_1 から φ_2 に変化したときのロバートソン–ウォーカースケール因子の増加量の厳密解は，

$$\frac{a(t_2)}{a(t_1)} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{1/\varepsilon} = e^{(\varphi_2-\varphi_1)\lambda/2\varepsilon} \tag{4.2.23}$$

で与えられるが，これは「スローロール」(スカラー場がゆっくり転がるという近似）を用いて得た式（4.2.14）を指数関数型ポテンシャルに適用した結果と厳密に一致している．

これらの理論では，$V(\varphi)$ が十分小さくなると不等式（4.2.10），(4.2.13）が満たされなくなり，φ は $V(\varphi)$ が最小値となる値 φ_0 のまわりで減衰振動を行うと仮定されている．最終的には φ は φ_0 に十分近くなるから，このまわりでのポテン

[*7] これはすべての t に対する厳密解であるが，最も一般的な解ではない．式（4.2.1）は 2 階の微分方程式だから 2 つの解を持つはずである．式（4.2.18）は特解であり，かつアトラクターとなっている．すなわち，大きな t に対して一般解はこの解に近づく．

シャルは以下のように 2 次関数で近似できる．

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 (\varphi - \varphi_0)^2 . \tag{4.2.24}$$

（現在の真空のエネルギーの値が小さいことを説明するためには，未だに謎である何らかの理由により，ポテンシャルの最小値は非常にゼロに近いと仮定しなくてはならない．）これはちょうど，スピンがゼロ，質量が m で速度が無視できる粒子を記述する場の理論と等価である．インフレーションが終了するためには，インフラトンスカラー場は通常の物質や放射を記述する場を含む他の場と結合していなくてはならない．このため，インフラトン場のエネルギー密度は，

$$\rho_\varphi(t) = \rho_\varphi(t_I) \left(\frac{a(t_I)}{a(t)} \right)^3 e^{-\Gamma(t-t_I)} \tag{4.2.25}$$

のように減少する．Γ は φ 粒子が他の場に崩壊する崩壊率で，t_I はインフラトンが減衰振動を始める時刻とする．これは宇宙の**再加熱**の時期として知られている*8．現在の宇宙で観測されているエントロピーは，この時期に生成されたと考えられている*9．

φ が崩壊して生成される粒子のエネルギー密度 ρ_M も式（1.1.32）のような保存則に従うが，インフラトンから供給されるエネルギーの流れを含めるため以下のように修正される．

$$\dot{\rho}_M + 3H(\rho_M + p_M) = \Gamma \rho_\varphi . \tag{4.2.26}$$

ここからの議論では，インフラトンが崩壊してできる粒子は相対論的であると仮定するとしよう．つまり，$p_M = \rho_M/3$ とする．すると式（4.2.26）の解は，

$$\rho_M(t) = \frac{\rho_\varphi(t_I)\, \Gamma\, a^3(t_I)}{a^4(t)} \int_{t_I}^{t} a(t')\, e^{-\Gamma(t'-t_I)}\, dt' \tag{4.2.27}$$

と書ける．現代のインフレーションモデルでは，これが現在の宇宙にあるすべての物質と放射の起源であると考える（この関係式を使う上では，密度 $\rho_M(t)$ が**パラメータ増幅**される可能性があることも考えておかねばならない．インフラトンが崩壊する場が別のスカラー場であるとすると，そのスカラー場とインフラトン

---

*8 宇宙の**再**加熱という言葉は，初期のインフレーション理論に由来する歴史的遺物である．初期のモデルでは，ゼロ温度でインフラトン場がゆっくり転がるスローロールが始まる前の宇宙は高温状態だったと考えられていた．

*9 A. D. Dolgov, A. D. Linde, *Phys. Lett.*, **116B**, 329 (1982); L. F. Abbott, E. Farhi, M. B. *Wise, Phys. Lett.*, **117B**, 29 (1982).

との相互作用によってスカラー場のエネルギー密度が急激に増大する可能性がある[*10]．スカラー場の期待値がインフラトン場 φ の実効的な質量を増加させるためにそのエネルギー密度 ρ_φ も増加する）．

式（4.2.27）で与えられるエネルギー密度は $t=t_I$ でゼロから始まり，初めのうちは増加するが，最終的には宇宙の膨張によって減少に転じる．これから $\rho_M(t)$ の最大値を計算してみよう．これは宇宙が到達する最大温度を決め，それは初期宇宙で生成されて現在まで残っているかもしれないもの，つまり冷たい暗黒物質，バリオン，磁気単極子，アクシオンなどの粒子に影響を与えるので，重要な量である．最大密度は以下の 2 つの極端な場合，$\Gamma \gg H(t_I)$ あるいは $\Gamma \ll H(t_I)$ の場合に簡単に計算できる．

$\Gamma \gg H(t_I)$ の場合には，何度も部分積分を行うことで式（4.2.27）を $H(t_I)/\Gamma$ に関してテイラー展開でき，以下の式を得る．

$$\rho_M(t) = \rho_\varphi(t_I)\left(\frac{a(t_I)}{a(t)}\right)^4 \left(1+\frac{H(t_I)}{\Gamma}+\cdots\right). \qquad (4.2.28)$$

この場合には ρ_M は急激に $\rho_\varphi(t_I)$ に近づいた後，通常の相対論物質のエネルギー密度のように a^{-4} に比例して減少するようになる．したがって，この場合インフラトン場の全エネルギーはインフレーションが終わると同時に通常の物質や放射に移される．4.1 節でインフレーションによる膨張量の自然対数に対する下限値を求めた際に用いた仮定がこれである．

$\Gamma \ll H(t_I)$ の場合には，式（4.2.27）における指数関数 $e^{-\Gamma(t'-t_I)}$ が減少を始めるより前に $\rho_M(t)$ は最大値に達する（これは以下で確認する）．よって指数関数の部分を 1 とすれば，

$$\rho_M(t) \simeq \frac{\rho_\varphi(t_I)\,\Gamma\, a^3(t_I)}{a^4(t)}\int_{t_I}^{t} a(t')\,dt' \qquad (4.2.29)$$

を得る．このときの宇宙のエネルギー密度はまだインフラトンに支配されているから $a(t)=a(t_I)(t/t_I)^{2/3}$ であり，式（4.2.29）は以下のようになる．

$$\rho_M(t) \simeq \frac{3}{5}\Gamma\, t_I\, \rho_\varphi(t_I)\left(\frac{t_I}{t}\right)^{8/3}\left(\left(\frac{t}{t_I}\right)^{5/3}-1\right). \qquad (4.2.30)$$

よって $\rho_M(t)$ は $t=(8/3)^{3/5}t_I$ で最大となる．また，$\Gamma \ll H(t_I)=2/3t_I$ という

---

*10 L. Kofman, A. D. Linde, A. A. Starobinsky, *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 3195 (1994); *Phys. Rev. D*, **56**, 3258 (1997).

仮定のもとでは確かに，$\rho_M(t)$ が最大となる時刻では式（4.2.27）の指数関数の引数はまだ無視できるほど小さい．最大値は以下で与えられる．

$$\rho_{M,\,最大} = (3/8)^{8/5}\varGamma\, t_I\, \rho_\varphi(t_I) = 0.139\left(\varGamma/H(t_I)\right)\rho_\varphi(t_I). \tag{4.2.31}$$

この場合，放射優勢宇宙が始まったときの最大エネルギー密度は，インフレーションが終わった時刻でのインフラトン場のエネルギー密度よりもずっと小さい．

4.3 カオス的インフレーション，永久インフレーション

「新しいインフレーション」モデルが提唱されてから間もなくして，いくつかのモデルでは指数関数的に膨張する泡が無限に生成され続けることがわかった[*1]．この現象は「永久インフレーション」と呼ばれている[*2]．1 つ例を挙げれば，空間におけるある 1 点でインフラトンスカラー場が（ポテンシャルの山の頂上のように）不安定な平衡点にあったとすると，時間 t が経過した後にインフラトン場がまだこの値に留まっている確率は $\exp(-\gamma t)$ に比例して減少する．しかし，この値を持つスカラー場が占める体積は $\exp(+3Ht)$ に比例して増大するから，$3H > \gamma$ であればインフレーションを起こしている空間の体積は永久に，指数関数的に増大する．

これまで，スカラー場は最初，空間によらず一定だと仮定してきた（ただし，10 章で扱う微小なゆらぎを除く）．新しいインフレーションが提唱されてすぐ，リンデが「カオス的インフレーション」の理論[*3]を提唱したことでインフレーション理論の可能性は大きく広げられた．この理論では，1 つ，あるいは複数のスカラー場の値は空間の位置によってランダムに変化している．この場合，インフラトンの値がほぼ一様であり，そのポテンシャルがスローロールの条件式（4.2.10），（4.2.13）を満たすような空間領域がそこかしこにあるだろう．たとえば，冪乗のポテンシャルを持つ場合にはスカラー場の値がプランク質量よりも大きいような領域だ．そのような領域が初期に十分大きければインフレーションが起こる．

[*1] P. J. Steinhardt, in *The Very Early Universe — Proceedings of the Nuffield Workshop*, 1982, eds. G. W. Gibbon S. W. Hawking, S. T. C. Siklos, Cambridge University Press (1983): 251; A. Vilenkin, *Phys. Rev. D*, **27**, 2848 (1983).

[*2] このモデルや他のインフレーションモデルのレビューは，A. Guth, talk given at the *Pritzker Symposium on the Status of Inflationary Cosmology* [astro-ph/0002188]; A. Linde, *J. Phys. Conf. Ser.*, **24**, 151 (2005) [hep-th/0503195] を見よ．

[*3] A.D. Linde, *Phys. Lett.*, **129B**, 177 (1983).

一様な領域が十分に大きい必要があるのは，式（B.63）で与えられるスカラー場のラグランジアン密度が空間微分を持つ項を含むためである．そのような項は，スカラー場が空間的に一様でなければ式（4.2.1）の左辺に $-a^{-2}\nabla^2\varphi$ という項として現れる．この項が 4.2 節のスローロールを用いた解析をだめにしてしまわないためには，φ が初期にほぼ一定値を取る領域の**固有**長さ L が $|\varphi/V'(\varphi)|^{1/2}$ よりも大きくなければならない．たとえば，$V(\varphi)=g\varphi^4$ というポテンシャルに対してはこの条件は以下のようになる．

$$L \gg \frac{1}{2\sqrt{g}|\varphi|} = \left(\frac{1}{g(4\pi G)^2\varphi^4}\right)^{1/2}\left(\sqrt{\pi G}\varphi\right)\sqrt{4\pi G}. \tag{4.3.1}$$

量子重力の効果を無視した古典的扱いが許される条件式（4.2.15）より，最初の因子は 1 よりずっと大きい．スローロールの条件式（4.2.10）より 2 番目の因子も 1 よりずっと大きい．したがって，一様な領域のサイズは 3 番目の因子，つまりプランク長さよりもずっと大きくなければいけないことになる．そんなに大きな一様領域は非常にまれかもしれないが，だからといってこの仮定の反論にはならない．なぜなら，そのような領域から発生したビッグバン宇宙の中でのみ生命が誕生できるからだ．

インフレーションにより，このような十分大きい領域は巨大なサイズに膨張し，その中にいる観測者から見れば宇宙は非常に一様で等方的に見える．このように，カオス的インフレーションは，最初のインフレーション理論が研究されていたときでさえ問題視されていなかった問題に解決を与える．その問題というのは，我々が住んでいる宇宙のロバートソン–ウォーカー計量が過去に非常に平坦であったというだけでなく，我々が住んでいる宇宙の計量がどうしてロバートソン–ウォーカー計量で与えられるのかという問題である．しかし残念なことに，我々が住んでいるインフレーション領域を超えた宇宙の他の領域を観測することはできないから，カオス的インフレーションの考えが正しいかどうかの答えは，天文観測からではなく，基礎物理学における進歩から得るしかないだろう．そのような進歩により，インフラトン場の存在が確認できるかもしれない．

空間のある領域におけるスカラー場がスローロールインフレーションを起こせるほど大きな値を持っていて，その領域の中にあるより小さな領域の量子ゆらぎによってインフラトン場がさらに大きな値へと移動させれば，これらの領域もま

たインフレーションを起こす[*4]．このように，カオス的インフレーションもまた永久的であることがわかっている．

*4 A. D. Linde, *Mod. Phys. Lett.*, **A1**, 81 (1986); *Phys. Lett. B*, **175**, 395 (1986); A. S. Goncharev, A. D. Linde, V. F. Mukhanov, *Int. J. Mod. Phys. A*, **2**, 561 (1987); A. D. Linde, D. A. Linde, A. Mezhlumian, *Phys. Rev. D*, 49, 1783 (1994) [gr-qc/9306035].

付録A
いくつかの有用な数値

数値定数

$\pi = 3.1415927$	$1'' = 4.84814 \times 10^{-6}$ ラジアン
$e = 2.7182818$	$\ln 10 = 2.3025851$
$\gamma = 0.5772157$	$\zeta(3) = 1.2020569$

物理定数[*1]

真空における光速	$c \equiv 2.99792458 \times 10^{10}$ cm s^{-1}
プランク定数	$h = 6.6260693(11) \times 10^{-27}$ erg s
換算プランク定数	$\hbar \equiv h/2\pi = 1.05457168(18) \times 10^{-27}$ erg s
	$= 6.58211915(56) \times 10^{-22}$ MeV s
電荷（非有理単位系）	$e = 4.80320441(41) \times 10^{-10}$ esu
電子ボルト	1 eV$= 1.60217653(14) \times 10^{-12}$ erg
	$\hbar c = 197.326968(17) \times 10^{-13}$ MeV cm
微細結合定数	$\alpha \equiv e^2/\hbar c = 1/137.03599911(46)$
電子質量	$m_e = 9.1093826(16) \times 10^{-28}$ g
	$m_e c^2 = 0.510998918(44)$ MeV
リュードベリエネルギー	$hcR \equiv m_e e^4/2\hbar^2 = 13.6056923(12)$ eV
トムソン断面積	$\sigma_T = 8\pi e^4/3m_e^2 c^4$
	$= 0.665245873(13) \times 10^{-24}$ cm^2
陽子質量	$m_p = 1.67262171(29) \times 10^{-24}$ g
	$m_p c^2 = 938.272029(80)$ MeV
中性子質量	$m_n c^2 = 939.565360(81)$ MeV
重水素質量	$m_d c^2 = 1875.61282(16)$ MeV
原子質量単位	$m(\mathrm{C}^{12})/12 = 1.66053886(28) \times 10^{-24}$ g

---

*1 *Review of Particle Physics*, S. Eidelman *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Lett. B* **592**, 1 (2004) より抜粋.

	$m(\mathrm{C}^{12})c^2/12 = 931.494043(80)$ MeV
アボガドロ定数	$N_A = 6.0221415(10) \times 10^{23}/\mathrm{mol}$
ボルツマン定数	$k_{\mathcal{B}} = 1.3806505(24) \times 10^{-16}$ erg/K
	$= 8.617343(15) \times 10^{-5}$ eV/K
放射エネルギー定数	$a_{\mathcal{B}} = \dfrac{8\pi^5 k_{\mathcal{B}}^4}{15h^3c^3}$
	$= 7.56577(5) \times 10^{-15}$ erg cm^{-3} K^{-4}
弱結合定数	$G_{wk} = 1.16637(1) \times 10^{-5}$ GeV^{-2}
重量定数	$G = 6.6742(10) \times 10^{-8}$ dyn cm^2 g^{-2}
プランクエネルギー	$\sqrt{\hbar c/G} = 1.22090(9) \times 10^{19}$ GeV

天文定数[*2]

ユリウス年	1 年 $\equiv 365.25$ 日 $= 3.1557600 \times 10^7$ s
光年	1 光（ユリウス）年 $= 9.460730472 \times 10^{17}$ cm
地球–太陽間の平均距離	1 天文単位（A.U.） $= 1.4959787066 \times 10^{13}$ cm
パーセク	1 pc $\equiv 648000/\pi$ A.U. $= 3.0856776 \times 10^{18}$ cm
	$= 3.2615638$ 光（ユリウス）年
太陽質量	$M_\odot = 1.9891 \times 10^{33}$ g
太陽光度	$L_\odot = 3.845(8) \times 10^{33}$ erg s^{-1}

見かけ等級 m に相当する見かけ光度

$$\ell = 2.52 \times 10^{-5}\ \mathrm{erg\ cm^{-2}\ s^{-1}} \times 10^{-2m/5}$$

絶対等級 M に相当する絶対光度

$$\mathcal{L} = 3.02 \times 10^{35}\ \mathrm{erg\ s^{-1}} \times 10^{-2M/5}$$

ハッブル定数を $H_0 = h \times 100$ km s^{-1} Mpc^{-1} としたとき：

ハッブル時間	$H_0^{-1} = 3.0857\,h^{-1} \times 10^{17}$ s
	$= 9.778\,h^{-1} \times 10^9$ 年
ハッブル距離	$c/H_0 = 2997.92458\,h^{-1}$ Mpc
臨界密度	$\rho_{\rm crit} \equiv \dfrac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.878\,h^2 \times 10^{-29}$ g cm^{-3}
	$= [0.00300\ \mathrm{eV}]^4\,h^2$

[*2] *Allen's Astrophysical Quantities*, ed. A. N. Cox, AIP Press (2000) より抜粋.

付録B
一般相対性理論の復習

この付録では，アインシュタインの重力理論である一般相対性理論を手短に復習する．この付録で一般相対性理論を網羅することはせず，理論のうち本書で必要となる部分を解説し，本書で用いている記号を導入するのに留めておく．

B.1 等価原理

一般相対性理論は，重力と慣性力の等価性の原理に基づいている．これを短くして等価原理と呼んでいる．等価原理は，重力質量と慣性質量が等しいため，自由落下する観測者が重力の効果を感じないというおなじみの観測を一般化したものである．等価原理によれば，任意の重力場があるとき，時空のどの点においても「局所慣性」座標系が存在し，その点近傍の十分小さい時空領域では重力の効果が存在しないような座標系を取ることができる．この原理により，もし時空の小さな領域で重力場がないときの物理系を記述する方程式が与えられていれば，重力場があるときの物理系を記述する方程式も導くことができる．必要なのは方程式を一般共変的な形，つまり時空を記述する座標系の選び方によらない形で書き，その方程式が重力がないときには既知の正しい方程式となるようにしておくことである．そのように書かれた方程式は，重力場がある場合にも正しい方程式となるはずである．等価原理によれば，あらゆる時空点で局所慣性座標系を選ぶことができ，重力の効果を消すことができるため，そのような座標系では重力場がないときの方程式が**成り立つ**．一方，一般共変性により，ある方程式がある座標系で正しければ，その方程式はどの座標系においても正しい．一般的には，重力場がないときに正しい方程式になる一般共変的な方程式の書き方は複数個あるが，これらの方程式の違いはつねに時空座標に関する微分を余計に含む．したがって，重力場や他の場が変化する空間あるいは時間スケールに比べて小さな時空領域に限ってさえいれば，これらの違いは無視できる．

B.2 計量：時を刻む時計

この手順の例として，重力場に置かれた時計が時間を刻む速さを記述する方程式を考えよう．まず，重力場がなく，静止している時計が時間間隔 dT 毎に 1 回

時を刻むとする．特殊相対性理論より，重力場がなく，運動している時計が刻む連続した時刻と時刻の間の時空距離 $d\xi^\alpha$ は以下の式で与えられる．

$$\eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = -dT^2. \tag{B.1}$$

（ここで，ξ^1，ξ^2，ξ^3 は空間座標を表すデカルト座標で，光速を 1 とする単位系で長さの次元を持つ．ξ^0 は $\xi^0 \equiv t$ で定義され，$\eta_{\alpha\beta}$ は対角行列要素が $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$，$\eta_{00} = -1$ で与えられるミンコフスキー計量である．重複する添字については和を取るものとする.）すると，重力場がある場合の時計の刻みを記述する方程式は，

$$g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = -dT^2 \tag{B.2}$$

で与えられる．$g_{\mu\nu}(x)$ は**計量**で，以下の 2 つの性質を持つ場である．まず，別の座標系 x'^μ に移ると計量は，

$$g'_{\rho\sigma}(x') = g_{\mu\nu}(x)\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \tag{B.3}$$

のように変化する．次に，ある点 x で選べる局所慣性座標系をデカルト座標で書いたとき，その点 x における計量は $\eta_{\alpha\beta}$ で，x における計量の 1 階微分はゼロとなる（式（B.3）において，x^μ と x'^μ は同一点を 2 つの異なる座標系で表している）．式（B.2）は一般共変形式で書かれている．というのは，位置座標の差は変換則，

$$dx'^\rho = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}dx^\mu \tag{B.4}$$

に従うため，以下の結果が得られる．

$$g'_{\rho\sigma}(x')\,dx'^\rho dx'^\sigma = g_{\mu\nu}(x)\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}dx^\kappa\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda}dx^\lambda = g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu.$$

ここで用いた議論をもう一度繰り返し述べておこう．式（B.2）は正しい方程式である．なぜなら，局所慣性座標系ではこの式は式（B.1）になり，それは重力がないときの時計の刻みを記述する正しい方程式だからである．一般共変性より，ある方程式がある座標系で正しければ，その方程式はいかなる座標系でも正しい．同じ議論により，重力がないときに静止系で長さ dL を持つ小さなものさしの端と端の間の時空距離 dx^μ は，一般座標系において以下で与えられる．

$$g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu = +dL^2.$$

同様に，光線に沿う 2 つの連続した位置の時空座標の差 dx^μ は以下で与えられる．

$$g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu = 0.$$

B.3 テンソル，ベクトル，スカラー

式（B.3）や式（B.4）のように変換する量はそれぞれ**共変テンソル**，**反変ベクトル**として知られている．一般的に，反変的な量は上付き添字を持つ形で書き，共変的な量は下付き添字を持つ形で書く．座標変換に伴ってこれらの量も変換されるが，その際には上付き添字 1 つにつき $\partial x'/\partial x$ が，下付き添字 1 つにつき $\partial x/\partial x'$ がかかる．これらの添字は混合しても良い．つまり，ある量が上付き添字と下付き添字の両方を持っていても良い．たとえば，混合テンソルの例として δ^μ_ν があり，これはあらゆる座標系において以下のように定義される．

$$\delta^\mu_\nu \equiv \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}. \tag{B.5}$$

このテンソルの成分はすべての座標系で同じ値を持つが，この量は以下の変換則に従うれっきとしたテンソルである．

$$\delta^\mu_\nu \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} = \delta^\rho_\sigma.$$

反変テンソルの例としては，計量の逆行列 $g^{\mu\nu}$ が挙げられる．

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu. \tag{B.6}$$

これがテンソルであることは，以下の計算で確かめられる．

$$\begin{aligned}\left(g^{\rho\sigma}(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}\right) g'_{\lambda\nu}(x') &= g^{\rho\sigma}(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} g_{\eta\tau}(x) \\ &= g^{\rho\sigma}(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\delta^\eta_\sigma \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} g_{\eta\tau}(x) = \delta^\rho_\tau \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu_\nu.\end{aligned}$$

これより，最初の行の括弧の中の量は x' 座標に変換された計量の逆数，

$$g^{\rho\sigma}(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} = g'^{\mu\lambda}(x')$$

であることがわかり，したがって計量の逆数は反変テンソルであることが証明できた．

スカラー $s(x)$ は，時空の任意の点 x^μ における $s(x)$ の値が座標変換によって変化しない量である．すなわち，変換された座標 x'^μ においても，

$$s'(x') = s(x) \tag{B.7}$$

が成り立つ．スカラー $s(x)$ の微分 $v_\mu \equiv \partial s/\partial x^\mu$ は**共変ベクトル**となる．

$$v'_\rho \equiv \frac{\partial s'}{\partial x'^\rho} = \frac{\partial s}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} = v_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}. \tag{B.8}$$

スカラーやベクトルは，それぞれ添字がない，あるいは添字が 1 つしかないテンソルだと考えて良い．いくつかのテンソルの直積はやはりテンソルである．たとえば 2 つのテンソル $A^\mu{}_\nu$，$B_{\rho\sigma}$ の直積 $C^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \equiv A^\mu{}_\nu B_{\rho\sigma}$ はテンソルである．また，式（B.2），(B.6）で行ったようにいくつかのテンソルの添字の縮約を取ることにより，添字の数がより少ないテンソルを作ることもできる．特別なケースとして，計量を使うことでテンソルの添字を上げ下げすることができる．テンソルと計量の直積を取り，テンソルの上付き添字と計量の添字との縮約を取ることでテンソルの上付き添字を下げることができる．逆に，テンソルと計量の逆行列の直積を取り，テンソルの下付き添字と計量の逆行列の添字との縮約を取ることでテンソルの下付き添字を上げることができる．たとえば，$A^{\mu\nu}$ がテンソルであれば $A_\rho{}^\nu \equiv g_{\mu\rho}A^{\mu\nu}$ もテンソルであるし，$B_\rho{}^\nu$ がテンソルであれば $B^{\sigma\nu} = g^{\sigma\rho}B_\rho{}^\nu$ もテンソルである．ただし，同じ添字を上下させれば，それは単にもとのテンソルに戻る．つまり $g^{\sigma\rho}\left(g_{\mu\rho}A^{\mu\nu}\right) = A^{\sigma\nu}$ である．テンソル 2 つを結ぶ等式や，あるテンソルがゼロであるとする方程式は一般共変的で，ある 1 つの座標系で成り立てばその他のあらゆる座標系でも成り立つ．

B.4　アフィン接続：落下する物体

しかし，みんながみんなテンソルというわけではない．たとえば式（B.4）より，粒子の座標 x^μ を粒子の軌跡を表すあるスカラー量 u（たとえばある固定された時計で測った時刻）に関して 1 階微分を取った量はベクトルである，

$$\frac{dx'^\rho}{du} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{du} \tag{B.9}$$

が，2 階微分を取った量はベクトルでは**ない**．

$$\frac{d^2x'^\rho}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{du}\right)$$

$$= \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{d^2x^{\mu}}{du^2} + \frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\mu}}{du}\frac{dx^{\nu}}{du}. \tag{B.10}$$

これは，重力がないときの粒子の運動方程式 $d^2\xi^{\alpha}/du^2 = 0$ を一般化した式が $d^2x^{\mu}/du^2 = 0$ ではないことを表している．なぜなら，$d^2x^{\mu}/du^2 = 0$ は一般共変的でないことによる．したがって，式（B.10）の右辺 2 項目を打ち消すように，以下の変換則を持つ $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$ という量を導入する必要がある．

$$\Gamma'^{\tau}_{\sigma\rho} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}}, \tag{B.11}$$

ただし，$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$ は x 近傍で局所慣性系を取り，デカルト座標を用いた場合はゼロになる．重力場中を自由落下している粒子の正しい運動方程式は，

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{du^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{du}\frac{dx^{\nu}}{du} = 0 \tag{B.12}$$

と与えられる．これは一般共変的で**あり**，重力場がないときには正しい運動方程式 $d^2\xi^{\alpha}/du^2 = 0$ に帰着する．$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ は**アフィン接続**として知られ，もちろんテンソルではない．

アフィン接続は計量を用いて以下のような単純な形に書ける．

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right]. \tag{B.13}$$

これが一般共変的であることは容易に確かめられる．さて，デカルト座標で書いた局所慣性系では両辺がゼロになるからこの方程式が成り立つ．したがってこの方程式は，一般共変性より一般の座標系で重力場がある場合にも成り立つ．

式（B.12）を満たす軌跡は**時空測地線**と呼ばれる．この軌跡上では，終点 u_1，u_2 における $x^{\mu}(u)$ の値が固定されていれば，以下の積分，

$$\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{g_{\mu\nu}(x(u))\frac{dx^{\mu}(u)}{du}\frac{dx^{\nu}(u)}{du}}\,du$$

は $x^{\mu}(u)$ の変化に対して一定に保たれる．計量を指定する代わりに，任意の dx^{μ} に対する**線素** $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ を指定することがよくある．

運動方程式（B.12）はパラメータ u のあらゆる選び方に対して成り立っているわけではない．これを理解するため，式（B.12）から以下の保存則が導けることに着目しよう．

$$\frac{d}{du}\left[g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{du}\frac{dx^{\nu}}{du}\right] = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{dx^{\mu}}{du}\frac{dx^{\nu}}{du}\frac{dx^{\lambda}}{du} + g_{\mu\nu}\frac{d^2x^{\mu}}{du^2}\frac{dx^{\nu}}{du} + g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{du}\frac{d^2x^{\nu}}{du^2}$$

$$= \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - g_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - g_{\nu\kappa}\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\right)\frac{dx^\mu}{du}\frac{dx^\nu}{du}\frac{dx^\lambda}{du}$$

$$= 0. \tag{B.14}$$

これより，u は**固有時間** τ,

$$d\tau \equiv \sqrt{-g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu} \tag{B.15}$$

の線形関数であることがわかる．固有時間は粒子に沿って自由落下する時計が測定する時間である（式（B.2）を見よ）．この結論に対する唯一の例外は光子のような質量を持たない粒子で，その運動の時空における軌跡は同じ運動方程式（B.12）に従うが，保存量 $d\tau/du$ はゼロとなる．質量を持たない粒子や光線に対しては，それらに沿う時計ではなく，他の自由落下する時計によって測定される時間を u として選ぶ必要がある．

質量 m がゼロでない場合には，アフィンパラメータ u を $u = \tau/m$ と選ぶと便利であり，これを用いてエネルギーと運動量を表す 4 元ベクトルを，

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{du}$$

のように定義できる．式（B.15）を用いれば，p^μ が次の式に従うことがわかる．

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -m^2.$$

質量を持たない粒子に対しては u がどのように規格化されていようと $g_{\mu\nu}(dx^\mu/du)(dx^\nu/du) = 0$ であるから，エネルギーと運動量を表す 4 元ベクトルが単に $p^\mu = dx^\mu/du$ となるように u を規格化すれば良い．

B.5　重力による時間の遅れ

これらの結果を用いると，非常に重要な等価原理の帰結の 1 つを導くことができる．ゆっくり運動する粒子の dx^i/du は dx^0/du よりもずっと小さいので，式（B.12）を以下のように近似する．

$$\frac{d^2x^i}{du^2} + \Gamma^i_{00}\frac{dx^0}{du}\frac{dx^0}{du} = 0. \tag{B.16}$$

弱い重力場では計量 $g_{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量に近いので $g_{\mu\nu}$ を以下のように書き，

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{B.17}$$

$h_{\mu\nu}$ の成分は 1 よりずっと小さいとする．すると $u = \tau \simeq x^0 \equiv t$ と近似できるので，弱い重力場中をゆっくり自由落下する粒子の運動方程式は，

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{00} \tag{B.18}$$

と書ける．ここで i は 1，2，3 を取り，それぞれデカルト座標の空間方向に対応する．弱い重力場のアフィン接続は，

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \simeq \frac{\eta^{\lambda\rho}}{2}\left[\frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right] \tag{B.19}$$

で与えられる．特に，時間に依存しない弱い重力場に対しては，

$$\Gamma^i_{00} \simeq -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \tag{B.20}$$

となる．式（B.18）と（B.20）を見ると $-h_{00}/2$ はニュートンの重力ポテンシャル ϕ と対応づけられることがわかるから，弱い静的な重力場を表す計量の成分として以下の結果を得る．

$$g_{00} \simeq -1 - 2\phi. \tag{B.21}$$

ここで，そのような重力場中にある静止した時計を考えよう．式（B.2）を用いれば，重力場がないときの時間間隔 dT から重力場があるときの時間間隔 dt を以下のように求められる．

$$(-1 - 2\phi)dt^2 \simeq -dT^2.$$

ゆえに，時間間隔は dT でなく，

$$dt \simeq (1 - \phi)dT \tag{B.22}$$

で与えられる．したがって星の表面では，負の重力ポテンシャルにより，星間空間や重力がずっと弱い地球の表面と比べて時間がゆっくり進む．すべての物理過程が同じだけゆっくり進むため星の表面にいる観測者がこの効果を観測することはできないが，遠方にいる観測者は星の表面の原子が発する光の周波数の減少を測定することでこの効果を観測できる．この重力的な時間の遅れは，地球の重力場中を光子が昇ったり降りたりする際に生じるスペクトル線の移動を観測することで正確に測定されている．

B.6 共変微分

スカラー場を時空に関して1階微分したものはベクトルだが，一般にベクトルの微分はテンソルではない．たとえば，反変ベクトル場 v^μ は以下の変換則，

$$v'^\rho = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} v^\mu \tag{B.23}$$

に従うから，その微分は以下のように変換する．

$$\frac{\partial v'^\rho}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} v^\mu. \tag{B.24}$$

したがって，テンソルを構築するにはこの変換則に現れる2項目を打ち消すような項を加えねばならない．このようにして以下の**共変微分**,

$$v^\mu{}_{;\nu} \equiv \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} v^\lambda \tag{B.25}$$

が得られ，これが混合テンソルのように変換することが以下のように確かめられる．

$$v'^\rho{}_{;\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} v^\mu{}_{;\nu}. \tag{B.26}$$

同様に，共変ベクトルの共変微分は，

$$v_{\nu\,;\mu} \equiv \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} v_\lambda \tag{B.27}$$

のように定義でき，これは共変テンソルである．より一般的に，任意の数の上付き添字や下付き添字を持つテンソルの共変微分も似たような形で与えられる．つまり，上付き添字1つにつき $+\Gamma$，下付き添字1つにつき $-\Gamma$ が加えられる．計量テンソル $g_{\mu\nu\,;\lambda}$ の共変微分がゼロになることは容易に確かめられるが，これは物理的にそうでなくてはならない理由がある．局所慣性的デカルト座標では共変微分は通常の微分と等しく，局所慣性系における計量の1階微分はゼロであるから共変微分はゼロで，ある座標系で $g_{\mu\nu\,;\lambda}$ がゼロであればすべての座標系で $g_{\mu\nu\,;\lambda}$ がゼロでなければならない．

B.7 重力の効果：マクスウェル方程式

重力がないときの場の方程式が与えられれば，その方程式に含まれるすべてのミンコフスキー計量 η を計量テンソル g に変え，すべての微分を共変微分に置き

換えることで（少なくとも十分小さい時空領域においては）重力があるときの方程式を導くことができる．ただし，すでに述べたようにこの手順で得られる結果は唯一のものではない．というのは，計量の時空に関する 2 階微分やさらに高階微分から得られるテンソルも重力がないときにゼロとなるので，そのような項を加える自由度が残るためである．しかし，十分に小さな時空領域ではそのようなテンソルが一般共変的な場の方程式に与える影響は無視できる．

たとえば，電磁場を記述するマクスウェル方程式を重力がないときにデカルト座標を用いて書けば，

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -J^\beta \tag{B.28}$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{B.29}$$

であり，ここで $F^{\alpha\beta}$ は電磁場テンソル（$F^{01} = E_1$，$F^{23} = B_1$ 等），J^α は電流を記述する 4 元ベクトル（J^0 は電荷密度で J^1，J^2，J^3 は電流密度）で，$F_{\alpha\beta}$ は以下のように定義される．

$$F_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}F^{\gamma\delta}. \tag{B.30}$$

したがって，重力がある場合の場の方程式は，

$$F^{\nu\mu}{}_{;\nu} = -J^\mu, \tag{B.31}$$

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;\nu} = 0 \tag{B.32}$$

および

$$F_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}F^{\lambda\kappa} \tag{B.33}$$

で与えられる．計量との縮約で添字を上下することで互いに関係づけられる $F_{\mu\nu}$ と $F^{\mu\nu}$ のようなテンソルは同じ物理量を表しているから，同じ文字（この場合は F）を用いる．

B.8 電流と保存則

添字 n によって個々にラベルをつけた粒子の系を考え，それぞれの粒子の時空座標を $x_n^\mu(u)$，電荷を e_n と書けば，電流を記述する 4 元ベクトルは以下の式で与えられる．

$$J^\mu(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}}\int du \sum_n e_n\,\delta^4\Big(x_n(u) - x\Big)\frac{dx_n^\mu(u)}{du}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}} \sum_n e_n \, \delta^3\Big(\boldsymbol{x}_n(t) - \boldsymbol{x}\Big) \frac{dx_n^\mu(t)}{dt}. \qquad \text{(B.34)}$$

ここで $\delta^4(z)$ はデルタ関数として知られる超関数で，$z=0$ で幅が無限小，高さが無限大のピークを持ち，なめらかな関数 $f(z)$ に対して以下の式が成り立つように規格化されている．

$$\int d^4x \, f(x) \, \delta^4(y-x) = f(y),$$

$\delta^3(\boldsymbol{z})$ は 3 次元における同様の超関数を表す．$\sqrt{-\mathrm{Det}g}\, J^0$ の有限体積に渡る空間積分はその体積中の全電荷に相当する（宇宙論では電流よりもバリオン流（バリオンカレント）の方により興味があるが，その場合は e_n を n 番目の粒子や銀河のバリオン数に置き換える）．4 次元のデルタ関数はスカラーではないため因子 $1/\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}$ が必要となるが，これは以下のように理解できる．x^μ を x'^μ に移す座標変換により，微分時空体積要素は，

$$d^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x \qquad \text{(B.35)}$$

のように変換される．ここで $|\partial x'/\partial x|$ は座標変換のヤコビアン，つまり成分が $\partial x'^\mu/\partial x^\nu$ で与えられる行列の行列式である．このヤコビアンは計量の行列式を用いて表すことができる．式（B.3）の行列式を計算すれば，

$$\mathrm{Det}\, g' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-2} \mathrm{Det}\, g \qquad \text{(B.36)}$$

を得るから，d^4x ではなく，$d^4x\sqrt{-\mathrm{Det}g}$ がスカラーであることがわかる（計量の行列式の前に負の符号があるのは，物理的な時空では行列式が負となることによる）．デルタ関数の定義式，

$$\begin{aligned} f(y) &= \int d^4x \, f(x) \, \delta^4(x-y) \\ &= \int \Big(d^4x \sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}\Big) f(x) \Big(\delta^4(x-y)/\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}\Big) \end{aligned}$$

より，デルタ関数そのものではなく，電流の式（B.34）に現れる比 $\delta^4(x_n - x)/\sqrt{-\mathrm{Det}\, g(x)}$ がスカラーのように変換することがわかる．この電流は保存則，

$$\partial_\mu\Big(\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}\, J^\mu(x)\Big) = \int du \frac{d}{du} \sum_n e_n \, \delta^4(x_n(u) - x) = 0 \qquad \text{(B.37)}$$

に従う (ただし x は積分の両方の端点において $x_n(u)$ と等しくないとした)．この保存則は，以下の一般共変的な保存則と等しい．

$$0 = J^\mu{}_{;\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} J^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\mu} J^\nu. \tag{B.38}$$

なぜなら，

$$\Gamma^\nu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \partial_\mu g_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} \partial_\mu \ln\Big(- \mathrm{Det} g \Big)$$

であるからによる．重力がなければ電流はデカルト座標で書いた保存則 $\partial_\mu J^\mu = 0$ を満たすから，一般共変的な式（B.38）が重力があるときの一般座標系での正しい保存則の表式である．

B.9 エネルギー–運動量テンソル

同様に，重力がない場合にはいかなる粒子や場も対称なエネルギー–運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$ を持つ．これは以下の意味で保存される．

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{B.39}$$

J^β が電流の β 成分であったように，$T^{\alpha\beta}$ は p^α の流れの β 成分であると考えることができる．重力がある場合の保存則は次のように与えられる．

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu} T^{\kappa\nu} + \Gamma^\nu_{\kappa\nu} T^{\mu\kappa} = 0. \tag{B.40}$$

最後の Γ の項は幾何学的な効果で電流の保存則の式にも現れたが，もう 1 つの Γ の項は重力と他の場との間のエネルギーと運動量のやり取りを表している．

たとえば，重力や，空間に局在する衝突以外の外力を受けずに自由に運動する粒子からなる理想気体を考えよう．エネルギー–運動量テンソルは式（B.34）の e_n をエネルギー–運動量 4 元ベクトル $p_n^\mu = E_n\, dx_n^\mu/dt$ に置き換えることで得られる．p_n^μ の空間成分は 3 元運動量の成分で，$p_n^0 = E_n$ である．

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{Det} g(x)}} \int du \sum_n \delta^4\Big(x_n(u) - x\Big) \frac{dx_n^\mu(u)}{du} p_n^\nu(u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{Det} g(x)}} \sum_n \delta^3\Big(\boldsymbol{x}_n(t) - \boldsymbol{x}\Big) p_n^\mu(t) p_n^\nu(t)/E_n(t). \end{aligned} \tag{B.41}$$

特に，T^{00} はエネルギー密度を表す．運動方程式（B.12）を使った直接計算により，このテンソルが一般共変的な保存則の式（B.40）を満たすことが示せる．

B.10 完全流体と不完全流体

ある流体が運動しているとしよう．その流体の各点において，その点近傍の流体素片とともに運動する系に移り，局所慣性的デカルト座標を張ったとする．この座標系で見たときの流体の性質が等方的となるような流体を完全流体と定義する．そのような局所慣性的かつ共動的な座標系では，完全流体のエネルギー–運動量テンソルの成分は以下の形を取る．

$$T^{ij} = \delta_{ij} p, \quad T^{i0} = T_{0i} = 0, \quad T^{00} = \rho,$$

ここで i と j は 1，2，3 を取り，それぞれデカルト座標の空間方向に対応する（T^{i0} や δ_{ij} に比例しない T^{ij} の成分は特別な空間方向，つまり T^{i0} の方向や T^{ij} の縮退していない固有ベクトルの方向を持つため，等方性に反する）．係数 p，ρ はそれぞれ流体の圧力，密度を表す．次に，共動座標系を離れて任意の速度を持つ局所慣性デカルト座標系に移れば，エネルギー–運動量テンソルは以下の形となる．

$$T^{\alpha\beta} = p\,\eta^{\alpha\beta} + (p+\rho) u^\alpha u^\beta, \tag{B.42}$$

ここで ρ と p は共動的局所慣性系で定義したものと同じ量であるが，u^α はローレンツ変換に対して 4 元ベクトルとして変換し，共動的局所慣性系ではデカルト座標の成分として $u^0 = 1$，$u^i = 0$ を持つ．この 4 元ベクトルは速度ベクトルとして知られ，すべての慣性系において $\eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$ を満たすように規格化される．

以上より，一般的に重力場がある場合の完全流体のエネルギー–運動量テンソルは，

$$T^{\mu\nu} = p\,g^{\mu\nu} + (p+\rho) u^\mu u^\nu, \quad g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \tag{B.43}$$

で与えられ，p と ρ は共動的局所慣性座標系におけるエネルギー–運動量テンソルの係数と等しいという条件で定義される．つまりこれらは座標系の取り方によらない量で，スカラーである．次に u^μ は一般座標変換に対して 4 元ベクトルのように変換し，共動的局所慣性座標系における成分は $u^0 = 1$，$u^i = 0$ であるとして定義される．$T^{\mu\nu}$ に関するこの公式は一般共変的であり，局所慣性座標系で正しいためすべての座標系において正しい．重力場があるときの相対論的流体力学の方程式は，このテンソルを保存則の式（B.40）に代入することで導ける．さらに，圧力が密度 ρ だけでなくバリオン数などの保存量の数密度 n にも依存する場合には，数密度の流れに関する保存式が必要で，それは局所慣性的デカルト座標で以

下のように与えられる．

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(n\,u^\alpha\right)=0. \tag{B.44}$$

したがって任意の重力場がある場合の一般座標系では，保存式は以下のようになる．

$$\left(n\,u^\mu\right)_{;\mu}=0. \tag{B.45}$$

不完全流体では，局所慣性的デカルト座標系におけるエネルギー–運動量の式（B.42）に小さな補正項 $\Delta T^{\alpha\beta}$，

$$T^{\alpha\beta}=p\eta^{\alpha\beta}+(p+\rho)u^\alpha u^\beta+\Delta T^{\alpha\beta} \tag{B.46}$$

が加わり，また保存量の数密度の流れの式にも以下のように小さな補正項 ΔN^α が加わる．

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(n\,u^\alpha+\Delta N^\alpha\right)=0. \tag{B.47}$$

スカラー量 ρ は流体素片とともに運動する共動座標系 $u^i=0$ で観測されるエネルギー密度として定義されているので，この系では $\Delta T^{00}\equiv 0$ となる．つまり，すべての（共動的とは限らない）局所慣性的デカルト座標では $u_\alpha u_\beta \Delta T^{\alpha\beta}=0$ となる（なぜならこの量はスカラーで共動座標系でゼロとなるからである．スカラー量は座標系の取り方によらず値が同じであることを思い出そう）．スカラー量 n は共動座標系で観測される保存量の数密度として定義できるので，同じ理由からすべての局所慣性的デカルト座標で $u_\alpha \Delta N^\alpha=0$ となる．圧力は ρ や n の任意の関数であり，静的で一様な流体の持つ圧力として定義できる（ただし 5 章以降では異なる定義を用いている）．一方，4 元速度ベクトル u^α の定義は幾分曖昧なままである．u^i を粒子が運ばれる速度として定義[*1]すれば，共動座標系 $u^i=0$ において $\Delta N^i=0$，$\Delta N^0=0$ となるので，すべての局所慣性的デカルト座標で $\Delta N^\alpha=0$ となる．本書では u^i をエネルギーが運ばれる速度として定義する[*2]．すると共動座標系では $T^{i0}=\Delta T^{i0}=0$ となる．すなわち共動座標系では $u_\beta \Delta T^{\alpha\beta}=\Delta T^{\alpha 0}=0$ であるから，すべての局所慣性的デカルト座標で $u_\beta \Delta T^{\alpha\beta}=0$ であり，一方で $\Delta N^\alpha\neq 0$ である．このように速度を定義すれば，熱力学第 2 法則を

*1 この定義は以下の文献によって用いられている．C. Eckart, *Phys. Rev.* **58**, 919 (1940)．G&C の 2.11 節と 15.10 節も見よ．

条件 $u_\beta \Delta T^{\alpha\beta} = 0$，$u_\alpha \Delta N^\alpha = 0$ と組み合わせることで以下の結果を得る[*3]．

$$\Delta T_{\alpha\beta} = -\eta\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} + u_\beta u^\gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\gamma} + u_\alpha u^\gamma \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\gamma}\right) - (\zeta - \frac{2}{3}\eta)\frac{\partial u^\gamma}{\partial x^\gamma}\Big(\eta_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta\Big), \tag{B.48}$$

$$\Delta N_\alpha = -\chi\left(\frac{nT}{\rho + p}\right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\mu}{T}\right) + u_\alpha u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right]. \tag{B.49}$$

ここで η，ζ，χ はそれぞれ剪断粘性（shear viscosity），体積粘性（bulk viscosity），熱伝導（heat conduction）を表す正の係数で，μ は保存量子数に付随する化学ポテンシャルでエントロピー密度が $(p + \rho - \mu n)/T$ になるように定義される．流体の平均自由行程および平均自由時間以内でほとんど変化しない任意の重力場を表す一般座標系における表式は，等価原理を用いればすぐに導ける．

$$\Delta T_{\mu\nu} = -\eta\left(u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu} + u_\nu u^\kappa u_{\mu;\kappa} + u_\mu u^\kappa u_{\nu;\kappa}\right) - (\zeta - \frac{2}{3}\eta) u^\kappa{}_{;\kappa}\Big(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu\Big), \tag{B.50}$$

$$\Delta N_\mu = -\chi\left(\frac{nT}{\rho + p}\right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\mu}{T}\right) + u_\mu u^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right]. \tag{B.51}$$

B.11　作用原理

理想気体や完全流体よりももっと複雑な系を記述するエネルギー–運動量テンソルを導くための一般的手法がある．この手法は，その系が作用原理に従う場合にのみ適用できる．作用原理に従えば，粒子や場の振る舞いを記述する微分方程式は，場と粒子の軌跡の汎関数である「物質の作用」I_m が場と粒子の微小な変化に対して定常的であるとすることで導かれる．等価原理により，重力の効果は I_m が一般座標変換に対して不変になるように計量を I_m に含めることで考慮できる．計量に微小な変化 $\delta g_{\mu\nu}$ を与えれば（ただし他のすべての変数は固定する），作用は以下のように変化する．

[*2]　（251 ページ）この定義は以下の文献で用いられている．L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Fluid Mechanics*, trans. by J. B. Sykes, W. H. Reid, Pergamon Press (1959)，127 節．邦訳は竹内均訳『流体力学 2』（ランダウ=リフシッツ理論物理学教程）．本書でこの定義を用いる理由は，この定義がエネルギー–運動量テンソルに最も厳しい制限を与えるからである．その代償として電荷やバリオン数などの保存量のカレントにはあまり制限を与えないが，宇宙論で扱う状況下では多くの場合においてゼロでない保存量が存在しない（たとえば宇宙論的なレプトン生成やバリオン生成以前の初期宇宙）か，たとえ存在しても，圧力と密度の関係式を変えるほど大きくない（たとえば温度が 10^4 K より高い放射優勢宇宙の時期）．

[*3]　Landau & Lifschitz，脚注 2 を参照．

$$\delta I_m = \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-\mathrm{Det}\,g(x)}\,T^{\mu\nu}(x)\,\delta g_{\mu\nu}(x), \tag{B.52}$$

ここで $T^{\mu\nu}(x)$ は対称テンソルで，エネルギー–運動量テンソルとして同定する．

たとえば，質量 m_n，電荷 e_n，軌跡 $x_n^\mu(u)$ を持ち，電磁場と相互作用する粒子からなる気体を記述する作用は，

$$I_m = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-\mathrm{Det}\,g}\,F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$$
$$-\sum_n m_n\int du\left[-g_{\mu\nu}(x_n(u))\frac{dx_n^\mu(u)}{du}\frac{dx_n^\nu(u)}{du}\right]^{1/2}$$
$$+\sum_n e_n\int du\frac{dx_n^\mu(u)}{du}A_\mu(u)$$

と書け，斉次マクスウェル方程式（B.29）は電磁場テンソルをベクトルポテンシャル A_μ を用いて $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と書くことで満たされる．また，物質の作用が $A_\mu(x)$ と $x_n^\mu(u)$ の任意の微小な変化（ただしこれらの変化は $x^\mu \to \infty$，あるいは $u \to \pm\infty$ でゼロになるとする）に対して定常的だとして，非斉次マクスウェル方程式（B.28），および重力場と電磁場中を運動する電荷を持った粒子を記述する運動方程式，

$$m_n\left[\frac{d^2x_n^\mu}{d\tau_n^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\rho}{d\tau_n}\right] = e_n\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}F^\mu{}_\nu(x_n)$$

を導くことができる．ここで τ_n は n 番目の粒子の軌跡に沿って測定される不変固有時間で，以下のように定義される．

$$\frac{d\tau_n}{du} \equiv \left[-g_{\mu\nu}(x_n(u))\frac{dx_n^\mu(u)}{du}\frac{dx_n^\nu(u)}{du}\right]^{1/2}.$$

式（B.52）からこの系を記述するエネルギー–運動量テンソルを以下のように導ける．

$$T^{\mu\nu}(x) = [-\mathrm{Det}g(x)]^{-1/2}\sum_n m_n\int d\tau_n\,\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}\,\delta^4(x - x_n)$$
$$+ F^{\rho\mu}(x)F_\rho{}^\nu(x) - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}(x)F^{\rho\sigma}(x)F_{\rho\sigma}(x),$$

ここで第 1 項は式（B.41）と同じで，残りの項は電磁場の持つエネルギーと運動量を表す（この結果を導く際，$\delta\mathrm{Det}g = \mathrm{Det}g\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$ および $\delta g^{\mu\rho} = -g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\sigma}g^{\sigma\rho}$ を用いた）．

式（B.52）で $T^{\mu\nu}$ を同定したが，これはこのテンソルが式（B.40）の意味で保存することから正当化できる．このように同定された $T^{\mu\nu}$ が保存することを示してみよう．I_m はスカラーであると仮定しているので，一般にその値は以下の同時変換によって変化しない．

$$d^4x \to d^4x', \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \frac{\partial}{\partial x'^\mu}, \tag{B.53}$$

$$x_n^\mu(u) \to x'^\mu_n(u), \quad A_\mu(x) \to A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x), \tag{B.54}$$

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x). \tag{B.55}$$

作用が A_μ と $g_{\mu\nu}$ 以外の場を含むときは，それらの場に対しても同様な変換を行う．ここで座標 x'^μ は（軌跡 $x'^\mu_n(u)$ と異なり）単なる積分変数であるから，至るところで x'^μ を x^μ に戻しても I_m の値は変わらない．ということは，I_m の値は以下の変換に対して不変である．

$$x_n^\mu(u) \to x'^\mu_n(u), \tag{B.56}$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) - [A'_\mu(x') - A'_\mu(x)], \tag{B.57}$$

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) - [g'_{\mu\nu}(x') - g'_{\mu\nu}(x)], \tag{B.58}$$

ただし x^μ と $\partial/\partial x^\mu$ は変化させない（このように座標変換と座標の張り替えを同時に行う作業はしばしば**ゲージ変換**と呼ばれる）．一般的な微小座標変換 $x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ を考えよう．ここで $\varepsilon^\mu(x)$ は微小な関数を表す．すると式（B.56）–（B.58）で与えられる変換は以下のように書き直せる．

$$x_n^\mu(u) \to x_n^\mu(u) + \varepsilon^\mu(x_n), \tag{B.59}$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{\partial \varepsilon^\nu(x)}{\partial x^\mu} A_\nu(x) - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} \varepsilon^\nu(x), \tag{B.60}$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) \to g_{\mu\nu}(x) &- \frac{\partial \varepsilon^\rho(x)}{\partial x^\mu} g_{\rho\nu}(x) - \frac{\partial \varepsilon^\sigma(x)}{\partial x^\nu} g_{\mu\sigma}(x) \\ &- \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\rho} \varepsilon^\rho(x). \end{aligned} \tag{B.61}$$

さて，粒子の運動方程式と「物質」場（電磁場を含む）を記述する場の方程式が満たされていれば，作用は粒子の軌跡と物質場の微小な変化に対して不変であ

る．一方，物質と重力を合わせた全体の系を記述する作用とは異なり，物質の作用は計量の変化に対して定常的ではない．たとえ計量の従う場の方程式が満たされていたとしても，物質の作用は計量の変化に対して定常的ではない．式（B.61）を式（B.52）に代入すれば，一般的な微小座標変換に対して I_m がスカラーである条件は以下のように書ける．

$$0 = \delta I_m = \int d^4x \sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}\, T^{\mu\nu}(x) \left[-\frac{\partial \varepsilon^\rho(x)}{\partial x^\mu} g_{\rho\nu}(x) - \frac{\partial \varepsilon^\rho(x)}{\partial x^\nu} g_{\mu\rho}(x) - \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\rho} \varepsilon^\rho(x)\right]. \tag{B.62}$$

これを部分積分し，$\varepsilon^\rho(x)$ の係数をゼロとすることによってエネルギー–運動量テンソルの保存式（B.40）を得る．

B.12 スカラー場の理論

宇宙論では，以下の作用を持つスカラー場 $\varphi(x)$ に頻繁に出会う*4．

$$I_\varphi = -\int d^4x \sqrt{-\mathrm{Det}g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} + V(\varphi)\right], \tag{B.63}$$

ここで $V(\varphi)$ はポテンシャルとして知られる関数を表す．重力場中の φ を記述する場の方程式はこの作用が φ の変化に対して定常的であるという条件から導ける．

$$\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{Det}g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{-\mathrm{Det}g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu}\right] = \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi}. \tag{B.64}$$

スカラー場のエネルギー–運動量テンソルは作用を計量について変分し，式（B.52）と比較することで得られる．

$$T_\varphi^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + V(\varphi)\right] + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}. \tag{B.65}$$

これは完全流体のエネルギー–運動量テンソルを記述する式（B.43）と同じ形をしている．エネルギー密度，圧力，4 元速度ベクトルはそれぞれ以下のように与えられる*5．

---

*4 一般には角括弧内の最初の項の係数も φ に依存するが，そのように場に依存する係数はスカラー場を再定義することで常に定数にできる．しかし，このような単純化はスカラー場を複数個含むモデルでは一般的に可能ではない．この点は 10.4 節で議論する．

$$\rho = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} + V(\varphi), \tag{B.66}$$

$$p = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} - V(\varphi), \tag{B.67}$$

$$u^\mu = -\left[-g^{\rho\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma}\right]^{-1/2} g^{\mu\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\tau}. \tag{B.68}$$

（u^μ の符号はエネルギー–運動量テンソルに影響を与えないので式（B.65）と式（B.43）を比較しても符号は決まらない．ここでは，u^0 の値が 4 章で考える状況下で $u^0 = +1$ となるように符号を選ぶ．その状況というのは，$g^{00} = -1$ を持つ時空でスカラー場が空間にはよらないが時間とともに増加する場合である．このとき平方根の中は正である.）φ の従う場の方程式（B.64）を用いれば，$T^{\mu\nu}_\varphi$ が式（B.40）の意味で保存することを示せる．

B.13　平行移動

軌道 $x^\mu = x^\mu(t)$ に沿って運動する物体は 1 つあるいは複数のベクトルやテンソルで記述でき，それらのベクトルやテンソルは t に依存する．もしこれらのベクトルやテンソルが，時刻 t に $x^\mu(t)$ における局所慣性系で変化しなければ（時間微分がゼロであれば），任意の系では**平行移動**と呼ばれる変化が生じる．たとえば反変ベクトル $v^\mu(t)$ の変化率は以下で与えられる．

$$\frac{dv^\mu(t)}{dt} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Big(x(t)\Big)v^\nu(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt}. \tag{B.69}$$

この式を確かめてみよう．時刻 t において，アフィン接続 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Big(x(t)\Big)$ がゼロとなる系ではこの式は正しい（つまり局所慣性系において $v^\mu(t)$ は変化しない）．こ

---

*5　（255 ページ）ここで与える圧力の表式は E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison–Wesley (1990) の式（8.21）で（説明なしに）与えられている表式とは異なっている．彼らによれば，スカラー場の圧力はロバートソン–ウォーカー計量において，

$$p = \dot\varphi^2/2 - V(\varphi) - (\nabla\varphi)^2/6a^2$$

で与えられ，式（B.67）をロバートソン–ウォーカー計量を用いて計算した結果の，

$$p = \dot\varphi^2/2 - V(\varphi) - (\nabla\varphi)^2/2a^2$$

とは異なっている．このコルブとターナーによる結果を再現するには，圧力を 4 元速度 v_μ を持って運動する観測者が局所慣性座標系において測定する $T^i{}_i/3$ の値として定義し，

$$p \equiv \frac{1}{3}\,(g_{\mu\rho} + v_\mu v_\rho)T^{\rho\sigma}(\delta^\mu_\sigma + v_\sigma v^\mu)$$

その速度 v^μ の成分を $v^0 = 1$，$v^i = 0$ とすれば良い．しかし，圧力に関するこの式を使うなら，速度 v^μ として式（B.68）で与えられる u^μ を用いる方がより自然なように思う．なぜなら，完全流体のエネルギー–運動量テンソルの式（B.43）に現れる速度は u^μ だからである．v^μ を u^μ とすれば式（B.67）を得る．

の式は一般共変的なので，局所慣性系で正しければすべての座標系において正しい．これを式（B.12）と比較すれば，運動量 $p^\mu = dx^\mu/du$ は平行移動の式を満たすことがわかる．同様に，ある軌道に沿って運動するテンソルが軌道上のある点における局所慣性系で変化しなければ，任意の系でこのテンソルが得る変化率は式（B.69）の右辺のような項の和で与えられる．このとき，反変（上付き）添字1つにつき $-\Gamma$，共変（下付き）添字1つにつき $+\Gamma$ を与える．たとえば共変テンソル $J_{\mu\nu}$ に対する平行移動の式は以下で与えられる．

$$\frac{dJ_{\mu\nu}(t)}{dt} = +\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Big(x(t)\Big)J_{\rho\nu}(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Big(x(t)\Big)J_{\mu\rho}(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt}.$$

B.14 重力場の方程式

あと残っている作業は，重力場の従う方程式を導くだけである．これらの方程式は2つの条件を満たさねばならない．まずこれらの方程式は一般共変的でなくてはならず，次にほとんど時間変化しない弱い重力場に対してこれらの方程式は式（B.21）にあるニュートンポテンシャル ϕ の従うポアソン方程式，

$$\nabla^2\phi = 4\pi G T^{00} \tag{B.70}$$

に帰着せねばならない．G はニュートンの重力定数である．ここで，もし我々が偏微分方程式の形として（ポアソン方程式のように）計量の時空に関する2階微分だけしか含まないものを考えれば，重力場の方程式は一意に決まる．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}R_{\lambda\kappa} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{B.71}$$

ここで $T_{\mu\nu}$ は下付き添字を持つエネルギー–運動量テンソルで，

$$T_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\lambda}\,g_{\nu\kappa}\,T^{\lambda\kappa}, \tag{B.72}$$

$R_{\mu\nu}$ は以下で定義される**リッチテンソル**である．

$$R_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\kappa}. \tag{B.73}$$

g_{00} と ϕ の関係が式（B.21）で与えられるとすれば，時間変化しない弱い重力場に対して場の方程式の時間–時間成分（$\mu = 0 = \nu$ 成分）からポアソン方程式（B.70）が得られる．式（B.71）の左辺に現れるテンソルは，以下の微分形式で書かれた**ビアンキ恒等式**を満たす．

$$\left[g^{\lambda\nu}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\rho\kappa}R_{\rho\kappa}\right)\right]_{;\lambda}=0. \tag{B.74}$$

この恒等式により，なぜ $R_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}R_{\lambda\kappa}$ の線形結合として $R_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}R_{\lambda\kappa}/2$ が重力場の方程式の左辺に現れるかが理解できる．なぜなら，そうでなければ場の方程式がエネルギー–運動量テンソルの保存則の式（B.40）と整合しないからである．重力場の方程式は，作用に以下のような重力の項を入れることでより容易に導ける．

$$I_g=-\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-\mathrm{Det}g(x)}\,g^{\lambda\kappa}(x)\,R_{\lambda\kappa}(x). \tag{B.75}$$

ビアンキ恒等式（B.74）は I_g が計量の一般座標変換のもとで不変であることから導出でき，重力場の方程式（B.71）は作用の和 I_g+I_m が計量の任意の変化に対して定常的であるとすることで導出できる．

もし，重力場の方程式に時空微分の数が 2 個より少ない項を許せば，場の方程式（B.71）の左辺に $g_{\mu\nu}$ に比例する項を足すことができる．これがいわゆる**宇宙定数**の項で，これについては 1.5 節で議論する．この項は $T_{\mu\nu}$ に対する「真空のエネルギー」の寄与だと解釈することもできる．宇宙定数を除けば，式（B.71）の左辺に加えることのできる項は時空微分の数が 2 個より**多い**項になる（これらの項は，たとえば重力の作用の被積分関数に $\sqrt{-\mathrm{Det}g}\,R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ や $\sqrt{-\mathrm{Det}g}$ $(R^{\mu}{}_{\mu})^2$ に比例する項を足すことで導ける）．次元解析より，そのような項の係数は（式（B.75）の係数 $1/16\pi G$ と比べて）長さの正の冪の次元を持つ．一般相対性理論と実験結果の一致よりこの長さは太陽系の大きさよりもずっと小さくなくてはならないから，時空微分の数が 2 個よりも多い項の効果は宇宙論的な距離では完全に無視できる．

付録C

放射と電子間のエネルギー輸送

光子が電離ガスを通過すると，どれほどの割合でエネルギーを得たり失ったりするだろうか？　この情報は，たとえば 2.5 節で学ぶスニヤエフ–ゼルドヴィッチ効果や，2.2 節で扱う物質と放射の熱平衡状態がどう保持されるかを理解するのに必要となる．本付録では，まず 1 個の光子が 1 個の電子に衝突した際に生じる光子のエネルギー変化量の平均値，および 2 乗平均値の式を導く．次にこれらの結果を用いて光子が電離ガスを通過した際に生じる光子の分布関数の変化の割合を導く．

ある電子が 4 元運動量ベクトル，

$$p = (0, 0, p_e, E_e), \qquad E_e \equiv \sqrt{p_e^2 + m_e^2} \tag{C.1}$$

を持って運動しているとしよう．この電子に入射エネルギー ω を持ち，極角 η，方位角 ϕ の方向に運動する光子が衝突し，衝突後の光子のエネルギーが ω'，衝突後の極角と方位角がそれぞれ η'，ϕ' に変化したとする．このとき，衝突前の光子の 4 元運動量ベクトル q と衝突後の 4 元運動量ベクトル q' はそれぞれ以下のように書ける．

$$q = \Big(\sin\eta\cos\phi,\ \sin\eta\sin\phi,\ \cos\eta, 1\Big)\omega, \tag{C.2}$$

$$q' = \Big(\sin\eta'\cos\phi',\ \sin\eta'\sin\phi',\ \cos\eta', 1\Big)\omega'. \tag{C.3}$$

この衝突による光子散乱の散乱断面積を計算するため，まずローレンツ変換によって電子の静止系に移ろう．このとき散乱断面積はよく知られた単純な形を取る．電子の静止系から見れば衝突前と衝突後の光子の 4 元運動量ベクトルはそれぞれ Lq，Lq' で，$L^{\mu}{}_{\nu}$ はローレンツ変換，

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \tag{C.4}$$

を表す．ここで，$\beta \equiv p_e/E_e$ は電子の速度を表し，γ は $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$ で定義

される．したがって，電子の静止系から見た衝突前と衝突後の光子の 4 元運動量ベクトルはそれぞれ

$$Lq = (\sin\alpha\cos\phi,\ \sin\alpha\sin\phi,\ \cos\alpha, 1)\,k, \tag{C.5}$$
$$Lq' = (\sin\alpha'\cos\phi',\ \sin\alpha'\sin\phi',\ \cos\alpha', 1)\,k' \tag{C.6}$$

で与えられる．ここで k，k' は電子の静止系から見た衝突前と衝突後の光子のエネルギー，

$$k = (-\beta\gamma\cos\eta + \gamma)\omega, \qquad k' = (-\beta\gamma\cos\eta' + \gamma)\omega' \tag{C.7}$$

で，この系において光子の進行方向が持つ衝突前と衝突後の極角はそれぞれ

$$\cos\alpha = \frac{\cos\eta - \beta}{1 - \beta\cos\eta}, \quad \cos\alpha' = \frac{\cos\eta' - \beta}{1 - \beta\cos\eta'} \tag{C.8}$$

で与えられる．方位角は衝突前と衝突後で同じである．さらに，電子の静止系におけるエネルギーと運動量の保存を考えることで，この系における衝突後の光子のエネルギーを，

$$k' = \frac{k}{1 + (k/m_e)(1 - \cos\theta)} \tag{C.9}$$

と書けることを思い出そう[*1]．ここで θ は以下の式で与えられる電子の静止系における散乱角を表す．

$$\cos\theta \equiv \widehat{Lq}\cdot\widehat{Lq'} = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos(\phi - \phi')\sin\alpha\sin\alpha'. \tag{C.10}$$

以上の結果を合わせると，もとの（電子が運動する）系における光子のエネルギーの変化の割合が電子の静止系の量で書ける．

$$\frac{\omega' - \omega}{\omega} = \frac{1}{1 + \beta\cos\alpha}\left(\frac{1 + \beta\cos\alpha'}{1 + (k/m_e)(1 - \cos\theta)} - \beta\cos\alpha - 1\right). \tag{C.11}$$

本書で興味あるほとんどの場合では k/m_e も β も 1 よりずっと小さいので，k/m_e に関して 1 次かつ β に関してゼロ次の項，および β に関して（今のところ）任意の次数かつ k/m_e に関してゼロ次の項だけ残せば以下の近似式を得る．

$$\frac{\omega' - \omega}{\omega} \simeq -(k/m_e)(1 - \cos\theta) + \frac{\beta(\cos\alpha' - \cos\alpha)}{1 + \beta\cos\alpha}. \tag{C.12}$$

電子が静止していて，かつ光子のエネルギーが $k \ll m_e$ の場合，微分散乱断面

[*1] QTF 第 1 巻，式 (8.7.14)（邦訳『場の量子論 2 巻』，式 (8.7.14)）．

積は（終状態における光子のスピンおよび偏光が取りうる状態について和を取り，始状態における光子のスピンおよび偏光が取りうる状態について平均を取れば）*2,

$$d\sigma = \frac{3\sigma_{\mathcal{T}}}{16\pi}\left(1+\cos^2\theta\right) d(\cos\alpha')\, d\phi' \tag{C.13}$$

で与えられる．$\sigma_{\mathcal{T}}$ はトムソン散乱断面積 $e^4/6\pi m_e^2$ を表す．微分散乱断面積はそれ自身でローレンツ変換に対して不変であるが，微分散乱断面積の表式に含まれる個々の変数はローレンツ不変ではない．散乱ごとに生じる光子のエネルギー変化の平均値は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\langle\omega'-\omega\rangle &= \frac{1}{\sigma_{\mathcal{T}}}\int(\omega'-\omega)\, d\sigma \\ &= \frac{3}{16\pi}\int_{-1}^{1} d(\cos\alpha')\int_0^{2\pi} d\phi'\ (\omega'-\omega)\,(1+\cos^2\theta) \\ &= -\frac{\beta\omega\cos\alpha}{1+\beta\cos\alpha}-\frac{k\omega}{m_e}.\end{aligned} \tag{C.14}$$

この結果を電子の運動方向，すなわち α に関して平均する．この平均値を計算するにあたり，$\cos\eta$ の -1 から $+1$ における分布は平坦であるが，$\cos\alpha$ の分布は平坦でないことに注意しよう．また，遷移確率は $d\sigma$ だけでなく，以下で与えられる相対速度にも比例していることに注意しよう*3.

$$u = \frac{|p\cdot q|}{E_e\omega} = 1-\beta\cos\eta = \frac{1-\beta^2}{1+\beta\cos\alpha}. \tag{C.15}$$

これらを用い，上で導出した光子のエネルギー変化の平均値を，電子と光子の衝突前の運動方向に関してさらに平均すると以下の結果を得る．

$$\begin{aligned}\langle\langle\omega'-\omega\rangle\rangle &= \int_{-1}^{+1}\langle\omega'-\omega\rangle\, u\, d\cos\eta\bigg/\int_{-1}^{+1} u\, d\cos\eta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\beta^2)^2}{(1+\beta\cos\alpha)^3}\left[-\frac{\beta\omega\cos\alpha}{1+\beta\cos\alpha}-\frac{k\omega}{m_e}\right] d\cos\alpha.\end{aligned} \tag{C.16}$$

β に関して 1 次の項は α に渡る積分でゼロになるので，β に関して 2 次の項，および ω/m_e に関して 1 次の項が主要な寄与をする．これらの主要な項だけ残せば，光子のエネルギー変化の割合の平均値は以下のように近似できる．

*2 QTF 第 1 巻，式（8.7.42）（邦訳『場の量子論 2 巻』，式（8.7.42））.

*3 QTF 第 1 巻，式（3.4.17）（邦訳『場の量子論 1 巻』，式（3.4.17））.

$$\langle\langle\omega' - \omega\rangle\rangle/\omega \simeq \frac{4}{3}\beta^2 - \frac{k}{m_e} \simeq \frac{4}{3}\beta^2 - \frac{\omega}{m_e}. \tag{C.17}$$

光子のエネルギー変化の平均値は β^2 と ω/m_e 程度の大きさの項を含むので，光子のエネルギー変化の 2 乗平均値を計算する際にも同程度の大きさの項まで残して計算する．式（C.12）より，

$$(\omega' - \omega)^2/\omega^2 \simeq \beta^2(\cos\alpha' - \cos\alpha)^2 \tag{C.18}$$

が得られるが，いま考えている近似の精度（次数）では u と 1，$d\cos\eta$ と $d\cos\alpha$ の違いは無視して良い．これより以下の結果を得る．

$$\begin{aligned}\langle\langle(\omega' - \omega)^2\rangle\rangle &\simeq \frac{3\beta^2\omega^2}{32\pi}\int_{-1}^{+1} d\cos\alpha \int_{-1}^{+1} d\cos\alpha' \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\phi'(\cos\alpha' - \cos\alpha)^2(1+\cos^2\theta) \\ &= \frac{2}{3}\beta^2\omega^2.\end{aligned} \tag{C.19}$$

ここまでで得た結果はすべて，電子がある単一の速度 β を持つと仮定して導かれたものである．速度が β から $\beta + d\beta$ の間にある電子の数が，電子の温度が T_e のときのマクスウェル–ボルツマン分布 $\propto \beta^2\exp(-m_e\beta^2/2k_{\mathcal{B}}T_e)\,d\beta$ で与えられるとすれば，β^2 の平均値は $3k_{\mathcal{B}}T_e/m_e$ となる．したがって式（C.17）と式（C.19）はそれぞれ，

$$\langle\langle\omega' - \omega\rangle\rangle \simeq \frac{4k_{\mathcal{B}}T_e}{m_e}\omega - \frac{\omega^2}{m_e}, \tag{C.20}$$

$$\langle\langle(\omega' - \omega)^2\rangle\rangle = \frac{2k_{\mathcal{B}}T_e}{m_e}\omega^2 \tag{C.21}$$

となる．

さて，エネルギーが ω から $\omega + d\omega$ の間にある $N(\omega)d\omega$ 個の光子が非相対論的電子からなるガスと相互作用する場合を考えよう．光子のエネルギーが $\omega \ll m_e$ のとき，光子の分布関数の変化率は以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned}\dot{n}(\omega)d\omega &= n_e\int d\omega'\, n(\omega')\, R(\omega' \to \omega)\, d\omega\,(1 + N(\omega)) \\ &\quad - n_e\, n(\omega)\, d\omega \int d\omega'\, R(\omega \to \omega')\,(1 + N(\omega')).\end{aligned} \tag{C.22}$$

ここで n_e は電子の数密度，$R(\omega \to \omega')d\omega'$ は $u\,d\sigma$ を電子の衝突前の速度で平均したもので，衝突によって光子のエネルギーが ω と $\omega + d\omega$ の間から ω' と $\omega' +$

$d\omega'$ の間に移る過程の遷移率を表す．$N(\omega) = (2\pi\hbar)^3 n(\omega) d\omega / 8\pi\omega^2 d\omega$ はエネルギー ω を持つ光子の量子状態あたりの数（分母が $4\pi\omega^2 d\omega$ ではなく $8\pi\omega^2 d\omega$ なのは光子が 2 つの偏光状態を持つため）で，因子 $1 + N(\omega)$ と $1 + N(\omega')$ は光子がすでに占有しているエネルギー状態に遷移する誘導放射を表す．式（C.22）の 1 項目は散乱によって光子のエネルギー ω' が ω に移ることで $n(\omega)$ を増やす効果，2 項目は ω が ω' に移ることで $n(\omega)$ を減らす効果である．すでに見たように，エネルギー $\omega \ll m_e$ を持つ光子が温度 T にある電子の非相対論的ガスを通過すると，光子のエネルギーは ω/m_e や $k_{\mathcal{B}}T/m_e$ といった小さな量だけ変化する．したがって $R(\omega' \to \omega)$ や $R(\omega \to \omega')$ は $\omega' \simeq \omega$ のまわりで鋭いピークを持つから，式（C.22）の 1 項目の積分変数を ω' から $\Delta \equiv \omega - \omega'$ に変え，2 項目の積分変数を ω' から $\Delta \equiv \omega' - \omega$ に変えるのが便利である．両辺の $d\omega$ を消去し，両辺に $(2\pi\hbar)^3/8\pi\omega^2$ をかければ以下の式を得る．

$$\dot{N}(\omega) = \frac{n_e}{\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,(\omega-\Delta)^2\,N(\omega-\Delta)\,R(\omega-\Delta\to\omega)\,(1+N(\omega))$$
$$-\,n_e N(\omega)\int d\Delta\,R(\omega\to\omega+\Delta)\,(1+N(\omega+\Delta)). \qquad \text{(C.23)}$$

係数 $R(\omega - \Delta \to \omega)$ と $R(\omega \to \omega + \Delta)$ は $\Delta = 0$ に鋭いピークを持つから，式（C.23）に含まれる他の因子（および $R(\omega - \Delta \to \omega)$ と $R(\omega \to \omega + \Delta)$ の差）を Δ に関して 2 次まで展開すると，

$$\dot{N}(\omega) = -\frac{n_e}{\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta\Big(1+N(\omega)\Big)\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^2\,N(\omega)\,R(\omega\to\omega+\Delta)\right]$$
$$+\frac{n_e}{2\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta^2\Big(1+N(\omega)\Big)\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left[\omega^2\,N(\omega)\;R(\omega\to\omega+\Delta)\right]$$
$$-\,n_e\,N(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta\,\frac{\partial N(\omega)}{\partial\omega}\,R(\omega\to\omega+\Delta)$$
$$-\,\frac{n_e}{2}\,N(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta^2\,\frac{\partial^2 N(\omega)}{\partial\omega^2}\,R(\omega\to\omega+\Delta)$$

を得る．これは次のように書き換えられる．

$$\dot{N}(\omega) = -\frac{n_e}{\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta\,\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^2\,N(\omega)\,R(\omega\to\omega+\Delta)\,\Big(1+N(\omega)\Big)\right]$$
$$+\frac{n_e}{2\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\,\Delta^2\,\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left[\omega^2\,N(\omega)\;R(\omega\to\omega+\Delta)\,\Big(1+N(\omega)\Big)\right]$$

$$-\frac{n_e}{\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\, \Delta^2 \frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^2 N(\omega)\, R(\omega\to\omega+\Delta)\, \frac{\partial N(\omega)}{\partial\omega}\right].$$

積分と微分の順序を入れ替えれば，

$$\begin{aligned}\dot{N}(\omega) = -\frac{n_e\sigma_{\mathcal{T}}}{\omega^2}\Bigg[&\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega^2 N(\omega)\Big(1+N(\omega)\Big)\langle\langle\omega'-\omega\rangle\rangle\right)\\ &-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left(\omega^2 N(\omega)\Big(1+N(\omega)\Big)\langle\langle(\omega'-\omega)^2\rangle\rangle\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega^2 N(\omega)\,\langle\langle(\omega'-\omega)^2\rangle\rangle\frac{\partial N(\omega)}{\partial\omega}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{C.24}$$

を得る．ここで，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\ \Delta\, R(\omega\to\omega+\Delta) &= \sigma_{\mathcal{T}}\langle\langle\omega'-\omega\rangle\rangle,\\ \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\ \Delta^2\, R(\omega\to\omega+\Delta) &= \sigma_{\mathcal{T}}\langle\langle(\omega'-\omega)^2\rangle\rangle\end{aligned} \tag{C.25}$$

を用いた．式（C.20）と式（C.21）でそれぞれ与えられる $\langle\langle\omega'-\omega\rangle\rangle$ と $\langle\langle(\omega'-\omega)^2\rangle\rangle$ の値を代入すれば，以下の**カンパニーツ方程式**[*4]を得る．

$$\dot{N}(\omega) = \frac{n_e\sigma_{\mathcal{T}}\,k_{\mathcal{B}}T_e}{m_e\omega^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^4\frac{\partial N(\omega)}{\partial\omega}\right] + \frac{n_e\sigma_{\mathcal{T}}}{m_e\omega^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega^4 N(\omega)\Big(1+N(\omega)\Big)\right]. \tag{C.26}$$

この式の正しさを確認するため，光子の分布関数がプランク分布で与えられ，**光子の温度が電子の温度と等しい**としよう．このとき $N(\omega) = [\exp(\omega/k_{\mathcal{B}}T_e)-1]^{-1}$ であるから式（C.26）の 2 つの項は互いに打ち消し合い，$N(\omega)$ は変化しない．光子と電子の温度が等しいということは光子と電子が熱平衡状態にあるのだから，もちろんこの結果は期待通りのものである．さらなる確認のため，（$\omega^4 N(\omega)$ と $\omega^4\,\partial N/\partial\omega$ が両方とも $\omega=0$，$\omega\to\infty$ でゼロになるならば）光子の数 $\int_0^{\infty} 4\pi\omega^2 N(\omega)\,d\omega$ は時間によらない，つまり光子の数が確かに保存していることに注目しよう．この結果は式（C.22）を ω に関して積分し，2 項目の ω と ω' を入れ替えることでも導ける．

---

*4 A. Kompaneets, *Zh. Exper. Teor. Fiziki* **312+**, 876 (1956).

付録D
エルゴード定理

宇宙論では温度や密度，あるいはスカラー場のように位置に依存し，そのゆらぎの分布がある種の確率分布に従うような変数をよく扱う．本付録では，一般的な実数の確率変数として D 次元のユークリッド座標 x の関数 $\varphi(x)$ を扱う．いくつかの確率変数を含む問題への一般化は自明である．

$\varphi(x)$ の様々な関数形の確率を与える分布関数が**一様**，すなわち異なる引数 x に対する $\varphi(x)$ の値の積の平均はそれらの引数の差にしか依存しない，と仮定すれば任意の z について以下の式が成り立つ．

$$\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)\rangle = \langle\varphi(x_1+z)\varphi(x_2+z)\cdots\varphi(x_n+z)\rangle\,. \tag{D.1}$$

x が時間座標であれば，このような分布は**定常**という．

次に，大きく離れた引数を持つ φ は互いに相関していないと仮定する．これを式で書けば，$|u|\to\infty$ に対して，

$$\begin{aligned}&\langle\varphi(x_1+u)\varphi(x_2+u)\cdots\varphi(y_1-u)\varphi(y_2-u)\cdots\rangle\\ &\quad\to\langle\varphi(x_1+u)\varphi(x_2+u)\cdots\rangle\langle\varphi(y_1-u)\varphi(y_2-u)\cdots\rangle\\ &\quad=\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\rangle\langle\varphi(y_1)\varphi(y_2)\cdots\rangle\end{aligned} \tag{D.2}$$

となる．最後の表式では式（D.1）を用いた．

これらの条件を置くことで**エルゴード定理**として知られる重要な結果を証明できる．式（D.2）の極限への収束が十分速ければ，積 $\varphi(x_1+z)\varphi(x_2+z)\cdots$ を任意の点 z_0 のまわりの z の範囲 R に渡って平均したものと，この積のアンサンブル平均を取ったものとの差は R を大きくするにつれて $R^{-D/2}$ に比例して小さくなる．この定理を式で書いてみよう．上記の差の 2 乗平均値を，

$$\begin{aligned}&\varDelta_R^2(x_1,x_2,\cdots)\\ &\equiv\left\langle\left(\int d^Dz\,N_R(z)\,\varphi(x_1+z)\varphi(x_2+z)\cdots\;-\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\rangle\right)^2\right\rangle\end{aligned} \tag{D.3}$$

と書いたとき，

$$N_R(z)\equiv(\sqrt{\pi}R)^{-D}\exp\left(-|z-z_0|^2/R^2\right) \tag{D.4}$$

と選べば*1，$R \to \infty$ のとき Δ_R は以下のようにゼロに近づく．

$$\Delta_R \to O(R^{-D/2}). \tag{D.5}$$

この定理を証明するため，まず条件 $\int N_R(z)\, d^D z = 1$ を用いて式（D.3）を，

$$\begin{aligned}
&\Delta_R^2(x_1, x_2, \cdots) \\
&= \left\langle \left(\int d^D z\, N_R(z) \Big[\varphi(x_1+z)\varphi(x_2+z)\cdots - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots \rangle \Big] \right)^2 \right\rangle
\end{aligned}$$

のように書き直す．2 乗を展開して再び式（D.1）と N_R の規格化条件を使い，さらに新しい積分変数 $u \equiv (z-w)/2$，$v \equiv (z+w)/2$ を導入すれば以下の式を得る．

$$\begin{aligned}
\Delta_R^2 &= \int d^D z\, N_R(z) \int d^D w\, N_R(w) \\
&\quad \times \left[\left\langle \varphi(x_1+z)\varphi(x_2+z)\cdots\varphi(x_1+w)\varphi(x_2+w)\cdots \right\rangle \right. \\
&\qquad \left. - \left\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots \right\rangle^2 \right] \\
&= \left(\frac{2}{\pi R^2} \right)^D \int d^D v\, \exp\left(-2|v-z_0|^2/R^2 \right) \int d^D u\, \exp\left(-2|u|^2/R^2 \right) \\
&\quad \times \left[\left\langle \varphi(x_1+u)\varphi(x_2+u)\cdots\varphi(x_1-u)\varphi(x_2-u)\cdots \right\rangle \right. \\
&\qquad \left. - \left\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots \right\rangle^2 \right] \\
&= \left(\frac{2}{\pi R^2} \right)^{D/2} \int d^D u\, \exp\left(-2|u|^2/R^2 \right) \\
&\quad \times \left[\left\langle \varphi(x_1+u)\varphi(x_2+u)\cdots\varphi(x_1-u)\varphi(x_2-u)\cdots \right\rangle \right. \\
&\qquad \left. - \left\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots \right\rangle^2 \right].
\end{aligned}$$

*1 式（D.4）で与えられるような N_R の特定の関数形は重要ではない．重要なのはこの関数が $|z - z_0|^2 \ll R^2$ のときに一定で，$|z-z_0|^2 \gg R^2$ のときに速くゼロに近づき，$\int N_R(z)\, d^D z = 1$ と規格化されているということだけである．

式（D.2）の極限への収束が十分速ければ u に渡る積分は因子 $\exp\left(-2|u|^2/R^2\right)$ がなくても収束するので，$R \to \infty$ のときにこの因子を 1 と置くことができ，最終的な表式，

$$\begin{aligned}\Delta_R^2 \longrightarrow \left(\frac{2}{\pi R^2}\right)^{D/2} \int d^D u \\ \times \Bigg[\Big\langle \varphi(x_1+u)\varphi(x_2+u)\cdots\varphi(x_1-u)\varphi(x_2-u)\cdots\Big\rangle \\ -\Big\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\Big\rangle^2\Bigg]\end{aligned} \tag{D.6}$$

を得る．したがって式（D.5）を証明できた．

付録E
ガウス分布

D 次元座標 x に依存する確率変数 $\varphi(x)$ を考えよう．φ の平均値はあらかじめ差し引いておく（つまり φ の平均値はゼロ）．偶数個の φ の積の平均値を考えよう．偶数個の φ を 2 個ずつのペア（pairs）に分けてそれぞれのペアの積の平均値を取り，これらすべてのペアの積の平均値をかけ合わせる．これを可能なペアの取り方（parings）について繰り返し，最後にすべてを足し合わせる．偶数個の φ の積の平均値がこのようなペアの平均値の積の和で書けるとき，φ の確率分布関数は**ガウス的**だといわれる．以上を式で表せば，

$$\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\rangle = \sum_{\text{pairings}}\prod_{\text{pairs}}\langle\varphi\varphi\rangle \tag{E.1}$$

と書ける（ただし，1 つのペアの中で単に座標を入れ替えたものや，単にペアの積の順番を入れ替えたものは区別しない）．一方，奇数個の φ の積の平均値はゼロとなる．1 例を挙げれば，

$$\begin{aligned}\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\rangle &= \langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle\langle\varphi(x_3)\varphi(x_4)\rangle \\ &+ \langle\varphi(x_1)\varphi(x_3)\rangle\langle\varphi(x_2)\varphi(x_4)\rangle + \langle\varphi(x_1)\varphi(x_4)\rangle\langle\varphi(x_2)\varphi(x_3)\rangle.\end{aligned} \tag{E.2}$$

（もちろん奇数個の φ をペアに分けることはできないから，これからもガウス分布において奇数個の φ の積がゼロになることが理解できる.）より一般的にいえば，$2n$ 個の φ の積の平均を取る際，$(2n)!$ 個ある座標の順列の 1 つ 1 つがあるペアの取り方に対応する（たとえば積の最初の φ が 2 番目とペアになり，3 番目が 4 番目とペアになる，等）が，これらのうち $2^n n!$ 個はそれぞれのペアの中の 2 つの座標を入れ替えたり，n 個のペアの順番を組み替えたりしただけのものだから，実際に独立なペアの数は $(2n)!/2^n n!$ である．

もし $\varphi(x)$ がガウス分布に従うなら，$\varphi(x)$ の線形汎関数もまたガウス分布に従う．たとえば，以下の形の線形汎関数を考えよう．

$$F_i[\varphi] \equiv \int d^D x\ f_i(x)\,\varphi(x). \tag{E.3}$$

式（E.2）に $f_1(x_1)\,f_2(x_2)\,f_3(x_3)\,f_4(x_4)$ をかけて積分すれば以下を得る．

$$\langle F_1F_2F_3F_4\rangle = \langle F_1F_2\rangle\langle F_3F_4\rangle + \langle F_1F_3\rangle\langle F_2F_4\rangle + \langle F_1F_4\rangle\langle F_2F_3\rangle. \tag{E.4}$$

このような分布がガウス的だと呼ばれるのは，φ の一般的な線形汎関数 $F[\varphi] = \int d^Dx f(x)\varphi(x)$ の確率分布が取る関数形による．$\langle F^{2n}[\varphi]\rangle$ に含まれる $(2n)!/2^n n!$ 個の組み合わせの 1 つ 1 つは同じ寄与 $\langle F^2[\varphi]\rangle^n$ を持つので，

$$\langle F^{2n}[\varphi]\rangle = \langle F^2[\varphi]\rangle^n (2n)!/2^n n! \tag{E.5}$$

となる．これは，この汎関数が F と $F+dF$ の間にある確率 $P(F)\,dF$ がガウス関数となることを意味する．

$$P(F)\,dF = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle F^2\rangle}}\exp\left(-\frac{F^2}{2\langle F^2\rangle}\right)dF. \tag{E.6}$$

この種の分布は，$\varphi(x)$ が独立なゆらぎを持つ多くの項の和で与えられるときに頻繁に現れる．このような和の分布は**中心極限定理**によりガウス関数となる．いま最も興味のある場合でいえば，宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎはほぼガウス的と考えられているが，それは温度ゆらぎが 1 つ，あるいは複数のほぼ自由な（つまりほぼ相互作用のない）量子場の量子ゆらぎから生じているからである（これに関しては 10 章で議論する）．

付録F
ニュートン力学的宇宙論

宇宙のエネルギー密度が冷たい暗黒物質によって支配されている時期のゆらぎのふるまいはニュートン力学で十分扱うことができる．この手法は，2.6 節で宇宙マイクロ波背景放射の異方性の初歩を学ぶ際，および 8.1 節で物質の大規模構造を扱う際に用いる．

質量密度 ρ と速度 $\boldsymbol{v}$ を持ち，圧力がゼロで重力ポテンシャルが ϕ の流体の運動を記述する非相対論的流体力学の方程式，およびニュートンの重力理論の方程式は，連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \Big(\boldsymbol{v} \rho \Big) = 0, \tag{F.1}$$

オイラーの式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \Big(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \Big) \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} \phi, \tag{F.2}$$

およびポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \tag{F.3}$$

である．これらの方程式から得られる非摂動解は（摂動解と区別するため棒線を付与して書くと）

$$\bar{\rho} = \rho_0 (a_0/a)^3, \quad \bar{\boldsymbol{v}} = H\boldsymbol{X}, \quad \bar{\phi} = 2\pi G \bar{\rho} \boldsymbol{X}^2/3 \tag{F.4}$$

で与えられる．ここで $H \equiv \dot{a}/a$ で，a_0 と ρ_0 は定数である．$a(t)$ は以下の式を満たし，

$$\dot{a}^2 + K = 8\pi G \bar{\rho} a^2/3, \tag{F.5}$$

K は定数である（ここで $\boldsymbol{X}$ は通常のユークリッド的座標ベクトルを表す．共動座標ベクトル $\boldsymbol{x}$ と混同しないように注意しよう）．これはもちろんロバートソン–ウォーカー計量を持つ宇宙論に対応し，実際，1.5 節でフリードマン方程式（F.5）の別の導出法としてこの解をすでに見ている．特に，共動的な物体の運動方程式 $d\boldsymbol{X}/dt = \bar{\boldsymbol{v}} = H\boldsymbol{X}$ の解は $\boldsymbol{X}(t) = [a(t)/a(t_0)]\boldsymbol{X}(t_0)$ で，これは式（1.5.22）と一致する．よって共動座標は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}/a$ で与えられる．

この ρ，$\boldsymbol{v}$，ϕ の非摂動解に小さな摂動 $\delta\rho$，$\delta\boldsymbol{v}$，$\delta\phi$ を加えよう．式（F.1)–(F.3）よりこれらの摂動に関して 1 次の項を取り出せば以下の式を得る．

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+3H\delta\rho+H\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta\rho+\bar{\rho}\boldsymbol{\nabla}\cdot\delta\boldsymbol{v}=0, \tag{F.6}$$

$$\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t}+H\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{v}+H\delta\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{\nabla}\delta\phi, \tag{F.7}$$

$$\nabla^2\delta\phi=4\pi G\delta\rho. \tag{F.8}$$

式（F.6)–(F.8）は並進変換に対して不変でないように見えるが，並進対称性はこれらの方程式を共動座標 $\boldsymbol{X}/a$ を用いて書き換えることで明らかになる．そのためには摂動を共動座標に関してフーリエ変換するのが便利である．

$$\delta\rho(\boldsymbol{X},t)=\int d^3q\ \exp\left(\frac{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{X}}{a(t)}\right)\delta\rho_{\boldsymbol{q}}(t), \tag{F.9}$$

$\delta\boldsymbol{v}$，$\delta\phi$ も同様にフーリエ変換する．すると偏微分方程式（F.6)–(F.8）は以下のような常微分方程式の形に書ける．

$$\frac{d\delta\rho_{\boldsymbol{q}}}{dt}+3H\delta\rho_{\boldsymbol{q}}+ia^{-1}\bar{\rho}\,\boldsymbol{q}\cdot\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}}=0, \tag{F.10}$$

$$\frac{d\delta\mathbf{v}_{\boldsymbol{q}}}{dt}+H\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}}=-ia^{-1}\boldsymbol{q}\delta\phi_{\boldsymbol{q}}, \tag{F.11}$$

$$\boldsymbol{q}^2\delta\phi_{\boldsymbol{q}}=-4\pi Ga^2\delta\rho_{\boldsymbol{q}}. \tag{F.12}$$

式（F.10)–(F.12）の解は，3 次元回転に対して従属変数がどう変換するかによって以下のように分類できる．

ベクトル型： ベクトル型の解では，すべてのスカラーはゼロとなる．$\delta\rho_{\boldsymbol{q}}$ と $\delta\phi_{\boldsymbol{q}}$ だけではなく，$\boldsymbol{q}\cdot\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}}$ もゼロとなる．すると式（F.10）と式（F.12）は自動的に満たされ，式（F.11）からは，

$$\frac{d\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}}}{dt}+H\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}}=0 \tag{F.13}$$

が得られる．解は単純に $\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}}\propto 1/a$ である．このようにベクトル型の解は減衰してしまうので，ほとんどの場合において無視される．

スカラー型： スカラー型の解では，速度場の摂動 $\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},t)$ は速度のスカラーポテンシャルの摂動 $\delta u(\boldsymbol{X},t)$ の（$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}/a$ に関する）勾配として書ける．フーリエ変換すれば，

$$\delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}}=i\boldsymbol{q}\,\delta u_{\boldsymbol{q}} \tag{F.14}$$

を得る．式（F.12）を用いて $\delta\phi_{\boldsymbol{q}}$ を消去すれば，式（F.11）は，

$$\frac{d\delta u_{\boldsymbol{q}}}{dt} + H\delta u_{\boldsymbol{q}} = -a^{-1}\delta\phi_{\boldsymbol{q}} = \frac{4\pi G a}{\boldsymbol{q}^2}\delta\rho_{\boldsymbol{q}} \tag{F.15}$$

となり，式（F.10）は，

$$\frac{d\delta\rho_{\boldsymbol{q}}}{dt} + 3H\delta\rho_{\boldsymbol{q}} - a^{-1}\bar{\rho}\,\boldsymbol{q}^2\delta u_{\boldsymbol{q}} = 0 \tag{F.16}$$

となる．さて，$K=0$ のときに $4\pi G\bar{\rho} = 3H^2/2$ であることを思い出そう．$\bar{\rho} \propto a^{-3}$ と H の定義を用いれば上記の方程式から $\delta u_{\boldsymbol{q}}$ を消去でき，密度ゆらぎに関する 2 階の微分方程式，

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\rho_{\boldsymbol{q}}}{\bar{\rho}}\right)\right) - \frac{3}{2}H^2a^2\left(\frac{\delta\rho_{\boldsymbol{q}}}{\bar{\rho}}\right) = 0 \tag{F.17}$$

を得る．さらに $K=0$ のときに $a \propto t^{2/3}$，$H = 2/3t$ であることを思い出せば以下の式を得る．

$$\frac{d}{dt}\left(t^{4/3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\rho_{\boldsymbol{q}}}{\bar{\rho}}\right)\right) - \frac{2}{3}t^{-2/3}\left(\frac{\delta\rho_{\boldsymbol{q}}}{\bar{\rho}}\right) = 0. \tag{F.18}$$

この式の一般解は $t^{2/3}$ と t^{-1} の線形結合で書ける．光子の最終散乱の時刻までには最初の項 $\delta\rho_{\boldsymbol{q}}/\bar{\rho} \propto t^{2/3} \propto a$ だけが生き残っていると考えて良い．平均密度 $\bar{\rho}(t)$ は $a^{-3}(t)$ に比例するから，$\delta\rho_{\boldsymbol{q}}(t) \propto a^{-2}(t)$ を得る．これを式（F.12）に代入すれば $\delta\phi_{\boldsymbol{q}}$ が時間に依存しないことが示せる．この結果は 2.6 節で用いた．

以上が式（F.10）–（F.12）の最も一般的な解であることを確認するには，単に方程式の数と解の数を数えてみれば良い．式（F.12）を用いて $\delta\phi_{\boldsymbol{q}}(t)$ を消去すれば式（F.10）と式（F.11）は $1+3=4$ 本の 1 階の微分方程式を構成するから，4 つの 1 次独立な解があるはずである．これまでに 2 つの独立なベクトル型の解（$\boldsymbol{q}$ に垂直な 2 つの方向に対応する）と 2 つの独立なスカラー型の解（$t^{2/3}$ と t^{-1} に比例する $\delta\rho_{\boldsymbol{q}}/\bar{\rho}$）を見つけたので，これらは確かに最も一般的な解である．

圧力がゼロでない場合や $K \neq 0$ の場合は，G&C の 15.9 節で詳しく扱っている．

用語集

（これらの記号は複数の節で用いられている．記号の後に付けた数字はその記号が最初に用いられた節を示す）

a	1.1	ロバートソン–ウォーカー計量のスケール因子
$a_{\mathcal{B}}$	2.1	放射エネルギー定数
$a_{\ell m}$	2.6	温度ゆらぎの部分波の振幅（$a_{T,\ell m}$ も同じ）
B	3.3	バリオン数
C_ℓ	2.6	温度ゆらぎの多重極展開の係数（$C_{TT,\ell}$ も同じ）
d	1.2	固有距離
d_A	1.4	角径距離
d_H	2.6	地平線の距離
d_L	1.4	光度距離
g	3.1	状態の数
$g_{\mu\nu}$	1.1	時空の計量
$\tilde{g}_{ij}$	1.1	ロバートソン–ウォーカー計量の空間部分
G	1.5	ニュートンの重力定数
h	1.3	100 km s^{-1} Mpc^{-1} を単位とするハッブル定数
	2.4	プランク定数 $= 2\pi\hbar$
H	2.2	宇宙膨張率 $\dot{a}(t)/a(t)$
H_0	1.2	ハッブル定数 $\dot{a}(t_0)/a(t_0)$
I	1.12	作用
ISW	2.6	積分ザクス–ヴォルフェ効果の寄与
j_ℓ	2.6	球ベッセル関数
J^μ	1.1	4 元カレントベクトル
$k_{\mathcal{B}}$	2.2	ボルツマン定数
K	1.1	ロバートソン–ウォーカー計量における曲率定数
ℓ	1.3	見かけの光度

	2.6	多重極展開の角波数
L	1.3	絶対光度
	2.1	最終散乱の時刻を表す添字
	3.3	レプトン数
m	1.3	見かけの等級
	1.5	粒子の質量
M	1.3	絶対等級
	1.9	全質量
Mpc	1.3	100 万パーセク
n	1.10	数密度
$\mathcal{N}$	3.1	粒子の種類の実効的な数
	4.1	インフレーションによる宇宙膨張量の自然対数
p	1.1	圧力
pc	1.3	パーセク
P_ℓ	2.4	ルジャンドル多項式
$\mathcal{P}_\phi$	2.6	重力ポテンシャルのパワースペクトル
$\boldsymbol{q}$	2.6	共動的波数ベクトル
q_0	1.4	減速パラメータ
r	1.1	ロバートソン–ウォーカー計量の動径座標
R	2.6	バリオンと光子のエネルギー密度比かける 3/4
$R_{\mu\nu}$	1.5	リッチテンソル
s	1.1	固有長さ
	3.1	エントロピー密度
$S_{\mu\nu}$	1.5	アインシュタインの場の方程式の源泉関数
$S(\hat{n})$	7.4	座標の z 軸方向から任意の方向 $\hat{n}$ への回転
SW	2.6	ザクス–ヴォルフェ効果の寄与
t	1.1	時間
t_0	1.5	現在の宇宙年齢
T	2.1	温度
$T_{\mu\nu}$	1.1	エネルギー–運動量テンソル

u	1.1	アフィンパラメータ
v_s	2.6	音速
V	1.12	スカラー場のポテンシャル
w	1.1	圧力と密度の比
$\boldsymbol{x}$	1.1	共動的空間座標
X	2.3	電離度
$\boldsymbol{X}$	1.9	ニュートン的な空間座標
Y_ℓ^m	2.6	通常の球面調和関数
z	1.2	赤方偏移

$\Gamma^\mu_{\nu\kappa}$	1.1	アフィン接続
$\tilde{\Gamma}^i_{jk}$	1.1	ロバートソン–ウォーカー計量の空間部分から計算されたアフィン接続
δ_{ij}	1.1	クロネッカーのデルタ記号
η	3.2	バリオンと光子の数密度比
$\eta_{\mu\nu}$	1.5	ミンコフスキー時空の計量
θ	1.1	極角
μ	3.1	化学ポテンシャル
ν	1.2	振動数
π_{ij}	1.5	全非等方慣性テンソル
π^S	1.5	スカラー型の非等方慣性
π_i^V	1.5	ベクトル型の非等方慣性
π_{ij}^T	1.5	テンソル型の非等方慣性
ρ	1.1	エネルギー密度
σ	1.10	断面積
	2.2	バリオン1個あたりのエントロピー
τ	1.1	固有時間
	1.10	光学的厚さ
ϕ	1.1	方位角
	2.6	重力ポテンシャル
φ	1.12	スカラー場

Ω_K	1.5	$-K/a_0^2H_0^2$
Ω_M	1.5	物質のエネルギー密度と臨界密度の比
Ω_R	1.5	放射のエネルギー密度と臨界密度の比
Ω_Λ	1.5	真空のエネルギー密度と臨界密度の比

例題集

(1) $K=+1$ を持つロバートソン–ウォーカー計量で記述される宇宙を考えよう．計量を変えず，また時間も変えることなしに点 $\boldsymbol{x}=(0,0,r)$ を点 $\boldsymbol{x}=(0,0,r')$ に移す変換を求めよ（ヒント：3 次元空間を 4 次元球体の表面として考えて問題の変換を 4 次元の回転として構築し，それをロバートソン–ウォーカー座標を用いて表せば良い）．また，同様な変換を $K=-1$ の場合にも求めよ．

(2) 宇宙の全圧力と全エネルギー密度の関係が $p=-\rho+\rho^2/\rho_1$ で与えられ，ρ_1 は定数であるとしよう．空間曲率はゼロと仮定する．ρ をロバートソン–ウォーカースケール因子 a の関数として計算せよ．極限 $\rho=\infty$ でのスケール因子は $a=a_1$ とする．次に a と ρ を時間の関数として計算せよ．極限 $\rho=\infty$ での時刻は $t=0$ とする．現在時刻での密度を ρ_0 とし，現在時刻における宇宙年齢と減速パラメータ q_0 を計算せよ．

(3) $\Omega_M=\Omega_R=\Omega_\Lambda=0$ を持つ空っぽの宇宙を考えよう．この宇宙モデルを用いて光度距離と角径距離を赤方偏移の関数として計算せよ．また，宇宙年齢は現在のハッブル定数とどう関係しているか？

(4) 天文学者が赤方偏移 $z=2.5$ にある銀河の年齢を測定したとしよう．$\Omega_M=1$ で真空のエネルギー密度および放射のエネルギー密度が無視できる宇宙モデルを棄却するには,（観測された光が放射された時刻での）この銀河の年齢はどれほどでなくてはならないか？　ハッブル定数の値は $H_0=70$ km/s/Mpc とする．

(5) $\Omega_M=0.25$，$\Omega_V=0.75$ とし，Ω_R は無視する．宇宙膨張が減速をやめて加速に転じた時刻に対応する赤方偏移を求めよ．

(6) 仮に，距離 r だけ離れた銀河のペアが及ぼす重力ポテンシャルエネルギーが r^{-1} ではなく r^{-n} に比例して減少するとしよう．ビリアル平衡にある銀河団中の，個々の銀河間の見込み角と銀河の速度分散が測定できたとすれば，それから計算できる銀河団の質量とハッブル定数の組み合わせは何か？

(7) 宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎが従う確率分布が等方的かつ並進対称なガウス分布だとする．このとき，以下の量，

$$\left\langle\left(C_\ell^{\text{観測}}-C_\ell\right)^3\right\rangle/C_\ell^3$$

を ℓ の関数として計算せよ．

(8) 新種の，質量のない素粒子が存在すると仮定し，その粒子は，宇宙の温度が 10^{16} K のときに他の粒子との相互作用をやめたとしよう．そして 1 TeV よりも小さい（実のところ，ずっと小さい）質量を持つ粒子は，最も単純な標準模型に含まれる粒子：

すべてのヘリシティ$\pm 1/2$ を持つ 3 世代のクオーク，レプトン，反クオーク，反レプトン，ヘリシティ± 1 および 0 を持つ $W^{\pm}$ と Z^0，ヘリシティ± 1 を持つ光子と 8 種類の質量のないグルーオン，ヘリシティがゼロの中性ボソン，およびすべての（粒子と区別できる）反粒子，

であるとする．このとき，現在時刻におけるこの新種の質量のない粒子の温度と光子の温度の比を求めよ．

(9) 重水素の束縛エネルギーが 5% だけ小さかったとしよう．このとき，宇宙初期で生成される He^4 の存在量はどのように変化するか？

(10) 標準模型において通常保存する量のうち，バリオン数とレプトン数の組み合わせとして $B-L$ の代わりに $3B-L$ が保存するとしよう．最も単純な（超対称性を含まない）標準模型に含まれる粒子を考慮し，$3B-L$ の密度と熱平衡状態におけるバリオン数，およびレプトン数の密度を関係づける式を導け．

(11) インフレーションによってロバートソン–ウォーカースケール因子が e^{50} 倍になったとしよう．放射優勢期の開始時刻におけるスケール因子とインフレーションの終了時刻におけるスケール因子は同じだとし，インフレーション終了時刻における宇宙のエネルギー密度は $[2\times 10^{16}\mathrm{GeV}]^4$，放射優勢期の開始時刻における宇宙のエネルギー密度は $[2\times 10^{15}\mathrm{GeV}]^4$ だとする．現在時刻において宇宙マイクロ波背景放射の温度が一様に見える角度スケールはどの程度か？

(12) ポテンシャルが $V(\varphi)=g\varphi^n$（g と n は正の定数）で与えられるとき，「スローロール」近似を用いてインフラトン場 $\varphi(t)$ を時間の関数として計算せよ．

索引

か

さ

た

な

は

ま

や

ら

わ

著者
スティーブン・ワインバーグ(Steven Weinberg)
1933年，ニューヨーク生まれ．コーネル大学卒業，コロンビア大学でPh.D.を取得．ハーバード大学教授を経て，現在テキサス大学物理学科教授で，天文学科教授も併任．専門は素粒子物理学と宇宙論．1979年に，S. グラショウ，A.サラムとともに電弱理論への貢献でノーベル物理学賞を受賞．おもな著書に，『ワインバーグ場の量子論（全6巻）』(邦訳，吉岡書店)，『宇宙創世はじめの3分間』(邦訳，ちくま学芸文庫)がある．

訳者
小松英一郎(こまつ・えいいちろう)
1974年，兵庫県宝塚市生まれ．2001年，東北大学大学院理学研究科博士課程修了．テキサス大学教授を経て，現在，マックスプランク宇宙物理学研究所所長，東京大学高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構上級科学研究員．理学博士．専門は宇宙論．おもな著書に，『宇宙を見る新しい目』(分担執筆，日本評論社)，シリーズ現代の天文学第3巻『宇宙論II』(分担執筆，日本評論社)がある．

ワインバーグの宇宙論［上］
ビッグバン宇宙の進化

発行日　2013年5月20日　第1版第1刷発行

著　者　S. ワインバーグ
訳　者　小松英一郎
発行者　串崎　浩
発行所　株式会社 日本評論社
170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4
電話　03-3987-8621(販売)　03-3987-8599(編集)
印　刷　三美印刷株式会社
製　本　松岳社
装　幀　妹尾浩也

ISBN978-4-535-78616-5